



В. Ф. Бутузов
С. Б. Кадомцев
В. В. Прасолов



Геометрия

7

Поурочные
разработки





**В. Ф. Бутузов
С. Б. Кадомцев
В. В. Прасолов**

Геометрия

**Поурочные
разработки**

7
класс



Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

2-е издание

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Б93

Бутузов В. Ф.
Б93 Геометрия. Поурочные разработки. 7 класс.: учеб.
пособие для общеобразоват. организаций / В. Ф. Буту-
зов, С. Б. Кадомцев, В. В. Прасолов. — 2-е изд. — М. :
Просвещение, 2017. — 112 с. — ISBN 978-5-09-043007-4.

Поурочные разработки составлены по учебнику В. Ф. Бутузо-
ва, С. Б. Кадомцева, В. В. Прасолова «Геометрия. 7 класс».

В них содержатся методические рекомендации по проведению
уроков, распределение задач, самостоятельных и контрольных ра-
бот по темам, приводится примерное тематическое планирование,
решены некоторые задачи из учебника.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

Учебное издание

Бутузов Валентин Фёдорович
Кадомцев Сергей Борисович
Прасолов Виктор Васильевич

ГЕОМЕТРИЯ

Поурочные разработки

7 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*

Редакторы *П. А. Бессарабова, И. В. Рекман*

Младший редактор *Е. А. Андреевкова*

Художественный редактор *О. П. Богомолова*

Компьютерная графика *С. А. Крутикова, О. Ю. Тупикиной*

Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*

Корректоры *М. А. Терентьева, С. В. Николаева*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—
953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать
с оригинал-макета 07.07.10. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага газетная. Гарнитура
Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 5,34. Тираж 3000 экз. Заказ №

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Ивановская областная типография».
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 978-5-09-043007-4

© Издательство «Просвещение», 2010
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2017
Все права защищены



Предисловие

Книга предназначена учителям, ведущим уроки геометрии по учебнику В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, В. В. Prasолова «Геометрия. 7 класс» под редакцией В. А. Садовниченко (М.: Просвещение, 2010).

Поурочные разработки содержат методические рекомендации по проведению уроков. Для каждого урока указаны его основные задачи, во многих случаях даны комментарии к теоретическому материалу, изучаемому на уроке, а также к задачам, которые рекомендуется рассмотреть на данном уроке.

Задачный материал к каждому параграфу учебника представляет собой набор заданий, каждое из которых состоит из нескольких задач по определённой теме, расположенных, как правило, в порядке возрастания сложности. Более того, по каждой теме даются два задания (с нечётным и следующим за ним чётным номером) с одинаковым числом задач в обоих заданиях, причём задачи в задании с чётным номером аналогичны соответствующим задачам (т. е. отмеченным той же буквой) в задании с нечётным номером. В классе рекомендуется решать задачи из заданий с нечётными номерами, а на дом задавать аналогичные задачи из заданий с чётными номерами. Решения некоторых задач приведены в конце книги.

Наряду с основными задачами к каждому параграфу в учебнике имеются дополнительные задачи в конце каждой главы. Их также можно использовать как для классной работы, так и для домашних заданий. Соответствующие рекомендации содержатся в этой книге.

Кроме того, в конце учебника даны задачи повышенной трудности по каждой главе. Они не являются обязательными и предназначены для индивидуальной работы с учащимися, проявляющими особый интерес к математике. Их можно использовать также в кружках и на факультативных занятиях.

И наконец, имеются задачи с практическим содержанием по каждой главе учебника. Они также приведены в конце учебника и могут использоваться учителем по его усмотрению.

По каждой теме (а часто и по каждому уроку) сформулированы основные требования к учащимся: что они должны знать и уметь в результате изучения этой темы.

По каждой теме предлагается провести самостоятельную работу, а по окончании изучения каждой главы и в конце учебного года — контрольную работу. Самостоя-

тельные и контрольные работы содержатся в книге «Дидактические материалы» (М.: Просвещение, 2010), подготовленной авторами специально для вышеупомянутого учебника.

Как известно, существует два варианта почасового тематического планирования учебного материала. Первый вариант рассчитан на 68 уроков (2 урока в неделю), а второй — на 50 уроков в учебном году (начиная со второй четверти 2 урока в неделю). В настоящей книге за основу принят первый вариант, т. е. предложенные методические рекомендации ориентированы на 68 уроков в учебном году. Для второго варианта в конце книги приведено распределение часов (уроков) по темам. В связи с уменьшением числа часов, отводимых на изучение той или иной темы, учителю нужно по своему усмотрению отобрать задачи из числа рекомендованных для решения в классе с тем, чтобы успеть рассмотреть их за меньшее число уроков, чем в первом варианте почасового планирования. На уроках, посвящённых решению задач по всей теме, целесообразно повторить теоретический материал этой темы. При проведении самостоятельных и контрольных работ можно использовать те же варианты, которые рекомендованы для первого варианта планирования.

Учителю следует иметь в виду, что все рекомендации, содержащиеся в книге, являются примерными, их не нужно рассматривать как обязательные. В зависимости от уровня учащихся учитель может вносить коррективы как в сами уроки, так и в подбор заданий для классной и домашней работы учащихся.

На всех уроках геометрии нужно исходить из того, что изучение этого предмета направлено не только на достижение предметных целей — знакомство с различными геометрическими фигурами, их свойствами, взаимным расположением, измерениями величин и т. д., но и на решение более важной задачи — формирование личности учащегося, развитие его логического мышления, умения ясно и точно излагать свои мысли, использовать геометрический язык и выполнять грамотные чертежи и рисунки для описания предметов окружающего мира, формирование представлений о математике и её методах, как универсальных средствах исследования реальных явлений и процессов с помощью математических моделей этих явлений и процессов, развитие творческих способностей учащихся.

К данному курсу существует **Электронная форма учебника (ЭФУ)** — соответствующая по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника и включающая в себя интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие материал печатного учебника.

Функциональные особенности ЭФУ:

- удобный и понятный интерфейс и навигация по ЭФУ;
- работа в онлайн- и офлайн-режимах;
- тестовые задания к каждой теме, разделу учебника;
- возможность добавления материалов, созданных учителем;
- инструменты изменения размера шрифта, создания заметок и закладок;
- удобная навигация.

Педагогические возможности использования ЭФУ:

- организация контроля и самоконтроля по результатам изучения темы;
- реализация технологий мобильного, дистанционного или смешанного обучения;
- реализация требований ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: рассказать учащимся о том, что такое геометрия; систематизировать известные им сведения о взаимном расположении точек и прямых; ввести понятие отрезка.

Урок следует начать с беседы о возникновении и развитии геометрии, используя «Введение» и «Историческую справку», расположенную в конце учебника (с. 115). В беседе важно подчеркнуть, что геометрия возникла в результате практической деятельности людей, связанной со строительством зданий и других сооружений, разметкой земельных участков и т. д. В ходе этой деятельности появлялись, постепенно накапливались и систематизировались различные геометрические факты и формулы. И лишь позднее в Древней Греции, начиная с исследований Фалеса (VI в. до н. э.), геометрия стала формироваться как самостоятельная наука, изучающая свойства геометрических фигур.

Можно предложить учащимся назвать известные им геометрические фигуры, например треугольник, прямоугольник, и сказать, что даже эти весьма простые фигуры обладают целым рядом замечательных свойств, внешне совсем не очевидных, и эти свойства будут изучаться в курсе геометрии. Затем следует подчеркнуть, что в геометрии важнейшую роль играют рассуждения, позволяющие на основе известных фактов устанавливать новые.

Основной особенностью геометрии, отличающей её от многих других школьных предметов, является то, что здесь недостаточно запомнить какие-то сведения, а нужно уметь последовательно выводить (обосновывать) их путём рассуждений, исходя из того, что уже известно и обосновано ранее. В конце беседы нужно отметить, что в настоящее время геометрия широко используется в различных сферах человеческой деятельности — архитектуре, машиностроении, исследованиях космоса и т. д.

При переходе к вопросу о взаимном расположении точек и прямых нужно иметь в виду, что определённое представление о точках и прямых учащиеся получили при изучении математики в 5—6 классах. Полезно напомнить, что прямая бесконечна, а на рисунке изображается только часть прямой — отрезок. Можно обратить внимание учащихся на слайды из учебника, где изображены реальные прообразы многих геометрических понятий, в том числе прямых и отрезков.

Основное внимание следует уделить очевидному факту: через две точки проходит прямая, и притом только

одна. Можно отметить, что это свойство выражает неискривлённость прямой: через две точки можно провести сколько угодно кривых линий, а прямых — только одну.

Важно обратить внимание учащихся на рассуждение, приводящее к выводу: две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек. Здесь следует подчеркнуть ещё раз, что логические рассуждения будут постоянно присутствовать при изучении геометрии, а вся геометрия строится таким образом, что из уже известных фактов с помощью логических рассуждений выводятся новые факты.

Усвоение введённых понятий, в том числе обозначений точек, прямых и отрезков, а также знака принадлежности, закрепляется в процессе выполнения задания 1.

Задание на дом: п. 1; вопросы 1—3 (с. 29); задание 2.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 1 учащиеся должны уметь чётко и правильно формулировать ответы на вопросы: сколько прямых проходит через две данные точки? сколько общих точек могут иметь две прямые? уметь обозначать точки и прямые на рисунке, применять символическую запись для обозначения принадлежности точки данной прямой, изображать возможные случаи взаимного расположения точек и прямых, двух прямых; уметь объяснить, что такое отрезок, изображать и обозначать отрезки на рисунке.

Урок 2

Луч и полуплоскость. Угол

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятие луча, полуплоскости, угла и его внутренней и внешней областей; познакомить учащихся с различными обозначениями лучей и углов.

При введении понятий луча и полуплоскости учителю следует иметь в виду, что, согласно определению, начало луча ему не принадлежит и также граница полуплоскости не принадлежит этой полуплоскости. В учебнике 7 класса об этом не говорится, но будет сказано в учебнике 8 класса при рассмотрении системы аксиом. Именно для того, чтобы аксиомы и вытекающие из них утверждения, связанные с лучами и полуплоскостями, формулировались более просто, удобно считать, что начало луча (граница полуплоскости) не принадлежит лучу (полуплоскости). Но эта дого-

ворённость не носит принципиального характера — можно определить луч и так, что начало ему принадлежит. Поэтому целесообразно вообще не акцентировать внимание учащихся на этом моменте, а если кто-либо из них задаст соответствующий вопрос, то можно сказать, что нам удобнее считать (для определённости), что начало луча (граница полуплоскости) не принадлежит лучу (полуплоскости).

После введения понятия и обозначений луча (при этом используются рисунки 10 и 11 учебника либо плакаты, сделанные по этим рисункам) и понятия полуплоскости (рис. 12 учебника) следует выполнить задание 3.

Затем нужно напомнить учащимся, что такое угол (это понятие им известно), рассказать, как обозначаются углы, что такое развёрнутый и неразвёрнутый угол, и ввести понятия внутренней и внешней области угла. Следует подчеркнуть, что фигуру, состоящую из неразвёрнутого угла и его внутренней области, также называют углом.

После этого с помощью рисунка 17 учебника необходимо разъяснить смысл слов «луч делит угол на два угла» и выполнить задание 5.

Задание на дом: пп. 2 и 3; вопросы 4—7 (с. 29); задания 4, 6.

Основные требования к учащимся

В результате изучения пп. 2 и 3 учащиеся должны уметь объяснить, что такое луч и его начало, что такое полуплоскость и её граница, изображать и обозначать лучи; уметь чётко формулировать ответы на вопросы: какая геометрическая фигура называется углом? что такое стороны и вершина угла? какой угол называется развёрнутым? уметь обозначать углы, показывать на рисунке внутреннюю область неразвёрнутого угла, проводить луч, разделяющий угол на два угла.

Уроки 3, 4

Равенство геометрических фигур. Сравнение отрезков и углов

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: проверить усвоение понятий и фактов, рассмотренных на первых двух уроках; ввести одно из важнейших понятий геометрии — понятие равенства фигур, в частности равенства отрезков и углов; объяснить, как сравниваются отрезки и углы, ввести понятия середины отрезка и биссектрисы угла.

Первый урок можно начать с проверки того, как учащиеся усвоили материал первых двух уроков. С этой целью им предлагается выполнить самостоятельную работу № 1 (варианты 3 и 4 самостоятельных и контрольных работ предназначены для более сильных учащихся).

Понятие равенства геометрических фигур вводится с помощью наложения одной фигуры на другую. Разумеется, учащиеся 7 класса должны воспринимать наложения так, как мы их наглядно представляем, а не как отображения плоскости на себя, свойства которых выражены в аксиомах (речь об аксиомах пойдёт лишь в 8 классе). Поэтому при введении понятия равенства фигур целесообразно использовать модели известных учащимся плоских фигур, для которых можно установить равенство непосредственным наложением одной фигуры на другую.

При изучении п. 5 также желательно использовать какие-то наглядные демонстрации сравнения двух отрезков и двух углов путём наложения. Полезно обращать внимание учащихся на разъяснения различных терминов, приведённые в учебнике, в частности на разъяснение слова «биссектриса» в п. 5.

Обычно у учащихся не вызывает сомнения, что каждый отрезок имеет середину, а у каждого угла есть биссектриса, и, разумеется, не нужно ставить перед ними вопрос: «А откуда это следует?» или «А как это доказать?» Учитель же должен иметь в виду, что на данном этапе мы не можем дать простого обоснования этим фактам, но сможем это сделать в главе 2 (см. дополнительные задачи 58 и 59 к этой главе). А более подробно этот вопрос обсуждается в учебнике 8 класса при рассмотрении системы аксиом.

Второй урок следует посвятить решению задач.

На уроках выполняется задание 7.

Задание на дом: пп. 4 и 5; вопросы 8—11 (с. 29); задание 8.

Основные требования к учащимся

В результате изучения пп. 4 и 5 учащиеся должны уметь объяснить, какие геометрические фигуры называются равными, как сравнить два отрезка (два угла), использовать несложные модели для иллюстрации понятия равенства фигур, применять знаки равенства и неравенства для записи результата сравнения отрезков (углов); уметь чётко формулировать ответы на вопросы: что такое середина отрезка? что такое биссектриса угла?

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: напомнить учащимся, как производится измерение отрезков при выбранной единице измерения (метр, сантиметр, дециметр), и рассмотреть свойства длин отрезков.

Рассказывая о процедуре измерения отрезков, следует подчеркнуть, что:

1) при выбранной единице измерения длина каждого отрезка выражается положительным числом, которое показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в измеряемом отрезке;

2) при разных единицах измерения длина одного и того же отрезка выражается разными числами;

3) на практике часто пользуются приближёнными значениями длин отрезков.

После рассмотрения свойств длин отрезков нужно решить некоторые задачи из задания 9 (на усмотрение учителя).

Задание на дом: п. 6; вопросы 12—14 (с. 29, 30); задание 10 (такие же пункты, что и в рассмотренном в классе задании 9).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 6 учащиеся должны уметь рассказать о процедуре (алгоритме) измерения отрезков, позволяющей сделать заключение: при выбранной единице измерения длина каждого отрезка выражается определённым положительным числом; уметь аргументировать утверждения о свойствах длин отрезков.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятие градусной меры угла; рассмотреть свойства градусных мер углов; ввести понятия прямого, острого и тупого углов.

При рассмотрении указанных вопросов нужно иметь в виду, что учащиеся уже знакомы с измерением углов с помощью транспортира, и поэтому можно опираться на имеющийся у них опыт. Следует отметить, что измерение углов аналогично измерению отрезков, но, в отличие от длины отрезка, которая может выражаться сколь угодно большим числом, градусная мера угла не может превышать 180° .

После рассмотрения свойств градусных мер углов и введения понятий прямого, острого и тупого углов можно решить некоторые задачи из задания 11 (на усмотрение учителя).

Задание на дом: п. 7; вопросы 15—19 (с. 30); задание 12 (такие же пункты, что и в рассмотренном в классе задании 11).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 7 учащиеся должны уметь провести аналогию между измерением отрезков и измерением углов, отмечая определённое различие этих процедур; уметь объяснить, что такое градус, минута, секунда и градусная мера угла; записывать градусные меры углов; аргументировать утверждения о свойствах градусных мер углов; уметь чётко формулировать ответы на вопросы: какой угол называется прямым? острым? тупым?

Урок 7 Измерение отрезков и углов

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: решать задачи, провести самостоятельную работу № 2.

В классе можно решить оставшиеся задачи из заданий 9 и 11, а в конце урока желательно провести самостоятельную работу № 2.

Задание на дом: оставшиеся задачи из заданий 10 и 12.

Урок 8 Смежные и вертикальные углы

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятия смежных и вертикальных углов и рассмотреть их свойства.

При рассмотрении смежных углов целесообразно отметить, что у каждого неразвёрнутого угла имеются два смежных угла. Можно предложить учащимся изобразить смежные углы для данного неразвёрнутого угла.

Прежде чем сформулировать утверждение о сумме смежных углов, можно поставить перед учащимися вопрос: «Как вам кажется, чему равна сумма смежных углов?»

И дать кому-то возможность обосновать правильный ответ на этот вопрос.

При рассмотрении свойства вертикальных углов полезно также начать с вопроса к учащимся: «Не усматриваете ли вы какой-то связи между вертикальными углами 1 и 3, а также 2 и 4 (на плакате, выполненном по рисунку 53 учебника)? При обосновании утверждения о свойстве вертикальных углов нужно обратить внимание учащихся на то, что это свойство устанавливается с помощью рассуждения на основе свойства смежных углов.

На уроке выполняется задание 13, при наличии времени можно рассмотреть также задачу 25.

Задание на дом: п. 8; вопросы 20, 21 (с. 30); задание 14.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 8 учащиеся должны уметь чётко формулировать ответы на вопросы: какие углы называются смежными? какие углы называются вертикальными? уметь формулировать и обосновывать утверждения о свойствах смежных и вертикальных углов, акцентируя внимание на тех уже известных фактах, которые используются при их обосновании.

Урок 9

Перпендикулярные прямые. Перпендикуляр к прямой

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятия перпендикулярных прямых и перпендикуляра, проведённого из точки к прямой; объяснить учащимся, что такое теорема и доказательство теоремы; доказать теорему о существовании перпендикуляра к прямой.

Понятия перпендикулярных прямых и перпендикуляра, проведённого из точки к прямой, нужно ввести в соответствии с текстом учебника, используя рисунки 54 и 55 или плакаты по этим рисункам.

Далее следует объяснить учащимся, что такое теорема и доказательство теоремы. Можно отметить, что при изучении геометрии им придётся постоянно иметь дело с теоремами и их доказательствами — этим геометрия существенно отличается от других школьных предметов.

При доказательстве теоремы о существовании перпендикуляра к прямой полезно подчеркнуть, что в доказатель-

стве используется известное свойство смежных углов и в дальнейшем доказательства теорем также будут опираться на установленные ранее факты.

На уроке выполняется задание 15.

Задание на дом: п. 9 (до теоремы о единственности перпендикуляра к прямой); вопросы 22—25 (с. 30); задание 16.

Урок 10

Перпендикулярные прямые. Перпендикуляр к прямой

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать теорему о единственности перпендикуляра к прямой и утверждения, вытекающие из этой теоремы.

Проводя доказательство теоремы о единственности перпендикуляра к прямой, следует акцентировать внимание учащихся на тех известных фактах, которые используются в доказательстве. В частности, используется тот факт, отмеченный ещё в п. 1, что через две точки проходит только одна прямая.

Доказательство теоремы проводится методом от противного. Однако особого акцента на этом можно не делать, так как разговор о методе доказательства от противного предстоит позднее, и тогда можно будет ещё раз вспомнить идею доказательства данной теоремы.

После доказательства теоремы следует обратиться к замечаниям 1 и 2. В замечании 2 доказано утверждение: две прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, не пересекаются. В связи с этим можно вспомнить, что ещё в п. 1 было установлено, что две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек. Утверждение, доказанное в замечании 2, позволяет сделать вывод, что прямые, не имеющие общих точек, действительно существуют.

В конце урока полезно провести самостоятельную работу № 3.

Задание на дом: п. 9; вопрос 26 (с. 30); задачи 17, 19, 21—23.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 9 учащиеся должны уметь формулировать понятие перпендикулярных прямых, использовать обозначение перпендикулярности двух прямых,

объяснить, что такое перпендикуляр, проведённый из точки к прямой; уметь чётко формулировать и доказывать теоремы о существовании и единственности перпендикуляра к прямой, а также утверждения, вытекающие из второй теоремы, отмечая при этом те уже известные факты, которые используются в проводимых доказательствах.

Урок 11 Решение задач

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: решать задачи; подготовиться к контрольной работе.

На уроке можно разобрать решения некоторых из дополнительных задач 17—26 и провести математический диктант № 1.

Задание на дом: оставшиеся из дополнительных задач 17—26.

Урок 12 Контрольная работа № 1

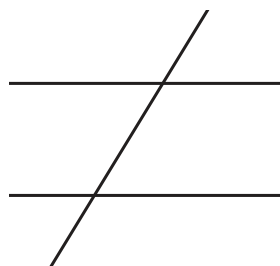
Ответы и указания

Вар. 1. 3. 45° . 4. Одну, две или три.

Вар. 2. 3. 60° . 4. На шесть или семь.

Вар. 3. 1. Нет. 2. 1,1 см или 3,5 см. 3. Острый. Указание. Минутная стрелка движется быстрее часовой. 4. Указание. $7 = 2 \cdot (8 - 3) - 3$.

Вар. 4. 1. См. рис. 1. 2. Нет. Указание. $4,3 \neq 1,1 + 3,1$. 3. Тупой. Указание. Минутная стрелка движется быстрее часовой. 4. Указание. $10 = 2 \cdot (11 - 4) - 4$ или $10 = 2 \cdot 11 - 3 \cdot 4$.



Урок 13 Треугольник. Теорема об углах равнобедренного треугольника

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятия треугольника, его элементов, равнобедренного треугольника и доказать теорему об углах равнобедренного треугольника.

С геометрической фигурой треугольником учащиеся знакомы из курса математики 5—6 классов. Напомнив им, как обозначаются треугольники и что такое вершины, стороны, периметр и углы треугольника, следует обратить внимание на то, что у каждой стороны треугольника имеются противоположная вершина, противолежащий угол и два прилежащих к этой стороне угла, а у каждой вершины имеется противоположная сторона.

Полезно отметить, что в отношении угла A треугольника ABC говорят, что он заключён между сторонами AB и AC (вся эта терминология будет использоваться, в частности, при изучении признаков равенства треугольников).

Обращаем внимание учителя (внимание учащихся на этом можно не акцентировать), что треугольник определяется здесь как фигура, составленная из трёх отрезков, а не как ограниченная ими часть плоскости. Это связано с тем, что строгое обоснование ряда свойств треугольника как фигуры, составленной из отрезков, существенно проще, чем для треугольника — части плоскости. Так, например, в последнем случае при доказательстве теорем о первом и втором признаках равенства треугольников недостаточно доказать, что путём наложения можно совместить соответственные стороны треугольников, нужно ещё доказать, что при этом совместятся соответствующие части плоскости, а это, конечно же, усложнит доказательство. Трактовка треугольника как части плоскости появится позже (в 9 классе), когда речь пойдёт о площади треугольника.

Далее можно выполнить задание 27.

Переходя к понятию равнобедренного треугольника, нужно подчеркнуть, что для его сторон вводятся специальные названия — боковые стороны и основание. Формулируя теорему об углах равнобедренного треугольника, следует пояснить, какие углы называются углами при его основании. Рассказывая доказательство этой теоремы, целесообразно не только мысленно, но и реально скопировать равнобедренный треугольник (например, нарисованный на доске) на лист прозрачной бумаги, а затем, перевернув лист, наложить копию на треугольник, как описано в доказательстве.

Отметим, что, в отличие от многих других учебников геометрии, теорема об углах равнобедренного треугольника до рассмотрения признаков равенства треугольника. Это даёт возможность ещё раз привлечь внимание учащихся к наложению (а понятие наложения является одним из основных понятий в данном курсе геометрии) и, кроме того, позволяет провести доказательство теоремы о третьем признаке равенства треугольников сразу после рассмотрения первого и второго признаков, не от-

влекаясь на доказательство теоремы об углах равнобедренного треугольника с помощью первого признака.

Задание 29 на применение теоремы об углах равнобедренного треугольника можно выполнить устно.

Задание на дом: пп. 10 и 11; вопросы 1—3 (с. 70); задания 28, 30.

Основные требования к учащимся

В результате изучения пп. 10 и 11 учащиеся должны уметь объяснить, какая фигура называется треугольником, что такое вершины, стороны, периметр и углы треугольника, называть (и показывать на рисунке) для данной стороны треугольника противолежащий и прилежащие к ней углы; уметь объяснить, какой треугольник называется равнобедренным и как называются его стороны; уметь чётко формулировать и доказывать теорему об углах равнобедренного треугольника, иллюстрировать доказательство с помощью простой модели — скопированного на лист прозрачной бумаги равнобедренного треугольника; уметь решать задачи типа 27, 29, причём в задачах 29 по готовым рисункам осуществлять поиск и выделение необходимой информации.

Урок 14

Признак равнобедренного треугольника

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать теорему, выражающую признак равнобедренного треугольника.

Урок можно начать с повторения теоремы об углах равнобедренного треугольника, предложив одному из учащихся рассказать доказательство этой теоремы у доски, а затем разобрать задачи 30 а), 30 б) из домашнего задания.

После этого нужно перейти к теореме о признаке равнобедренного треугольника, обратив внимание учащихся на то, что эта теорема доказывается с помощью такого же приёма, как и предыдущая: копируем треугольник на лист прозрачной бумаги, переворачиваем копию и накладываем на треугольник так, чтобы копия треугольника совпала с самим треугольником. Но при этом сама процедура наложения отличается от той, которая была в предыдущей теореме. Если там мы совмещали угол A перевёрнутой копии треугольника с углом A самого треугольника, то теперь совмещаем сторону BC перевёрнутой копии со стороной CB самого треугольника.

Следует разъяснить учащимся смысл слова «признак». В русском языке это слово имеет несколько значений. В геометрии под признаком понимают свойство, позволяющее отнести данный объект к определённому классу объектов. Например, признак равнобедренного треугольника — два угла равны. Этот признак позволяет отнести треугольник к классу равнобедренных треугольников. После того как доказана соответствующая теорема, в последующих рассуждениях используется не сам признак (равенство двух углов), а теорема о признаке равнобедренного треугольника: если треугольник обладает соответствующим признаком (два угла равны), то он равнобедренный. Всё сказанное относится также и к признакам равенства треугольников, и к признаку касательной, и т. д.

После рассмотрения доказательства теоремы выполняется задание 31, при этом можно подчеркнуть, что в пунктах б) и г) используются обе теоремы (об углах равнобедренного треугольника и о признаке равнобедренного треугольника).

Задание на дом: п. 12; вопрос 4 (с. 70); задание 32.
--

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 12 учащиеся должны уметь чётко формулировать и доказывать теорему, выражающую признак равнобедренного треугольника; уметь объяснить сходство и различие в доказательствах этой и предыдущей теорем; уметь объяснить смысл слова «признак»; уметь решать задачи типа 31, производя поиск и выделение необходимой информации на данных рисунках.

Уроки 15, 16

Теорема о высоте равнобедренного треугольника

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: ввести понятия биссектрисы, медианы и высоты треугольника; доказать теорему о высоте равнобедренного треугольника и вывести следствия из неё.

В начале первого урока можно повторить теоремы об углах равнобедренного треугольника и о признаке равнобедренного треугольника и разобрать решение задачи 32 г) из домашнего задания, в котором используются обе теоремы.

С понятиями биссектрисы, медианы и высоты треугольника учащиеся встречаются впервые, полезно обра-

тить их внимание на различие между биссектрисой угла (это луч) и биссектрисой треугольника (это отрезок), а также на смысл слова «медиана».

При доказательстве теоремы о высоте равнобедренного треугольника можно обратить внимание на два момента: 1) доказательство снова (как и в случае двух предыдущих теорем) проводится с помощью наложения перевёрнутой копии треугольника ABC на сам треугольник; 2) тот факт, что высота AD копии совместится с высотой AD треугольника, следует из теоремы о единственности перпендикуляра к прямой.

После доказательства теоремы нужно ввести понятие следствия и сформулировать два следствия из доказанной теоремы.

Затем можно привлечь внимание учащихся к рисункам 73—75 учебника или плакатам, сделанным по этим рисункам, на которых три медианы треугольника (три биссектрисы, три высоты или их продолжения) пересекаются в одной точке, и отметить, что обоснования этим фактам мы сможем дать только в 8 классе.

Второй урок следует посвятить решению задач.

На уроках выполняется задание 33.

Задание на дом: п. 13; вопросы 5—9 (с. 70, 71); задание 34.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 13 учащиеся должны уметь объяснить, что такое биссектриса, медиана и высота треугольника; формулировать и доказывать теорему о высоте равнобедренного треугольника и два следствия из этой теоремы; уметь решать задачи типа 33, используя свойства и признаки равнобедренного треугольника и устанавливая причинно-следственные связи.

Урок 17

Равные треугольники.

Первый признак равенства треугольников

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: напомнить учащимся понятие равных фигур, в частности равных треугольников; доказать теорему, выражающую первый признак равенства треугольников.

Урок можно начать с проверки усвоения учащимися сведений, связанных с равнобедренным треугольником, и с этой целью провести самостоятельную работу № 4.

Приступая к рассмотрению признаков равенства треугольников, учитель должен иметь в виду, что они являются основным рабочим аппаратом всего курса геометрии. Доказательства многих теорем строятся по схеме: поиск равных треугольников — обоснование их равенства (с помощью признаков) — следствия, вытекающие из равенства треугольников.

Вначале нужно напомнить понятие равенства двух фигур, в частности двух треугольников, и отметить, что если два треугольника равны, т. е. их можно совместить наложением, то элементы (т. е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника, а также соответственно равны медианы, биссектрисы и высоты равных треугольников.

Далее следует сформулировать теорему, выражающую первый признак равенства треугольников, и можно предложить учащимся самим сообразить, как, используя равенства $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, наложить треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы они совместились.

При наличии времени можно решить задачи 35 а), 35 б).

Задание на дом: пп. 14, 15; вопрос 10 (с. 71); задачи 55—57, для более сильных учащихся также задача 58.

Урок 18 Первый признак равенства треугольников

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: решать задачи на применение первого признака равенства треугольников.

Урок целесообразно начать с повторения теоремы, выражающей первый признак равенства треугольников, можно предложить одному из учащихся рассказать доказательство теоремы у доски.

Затем решаются задачи из задания 35 на применение первого признака равенства треугольников.

Задание на дом: п. 15; задание 36.

Основные требования к учащимся

В результате изучения пп. 14 и 15 учащиеся должны уметь объяснить, какие треугольники называются равными, формулировать и доказывать теорему, выражающую

первый признак равенства треугольников; использовать информационные технологии для моделирования наложения одного треугольника на другой в ходе доказательства теоремы; уметь решать задачи типа 35, осуществляя в задачах по готовым рисункам поиск и выделение необходимой информации.

Урок 19 Второй признак равенства треугольников

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать теорему, выражающую второй признак равенства треугольников; рассмотреть задачи на применение этой теоремы.

Сформулировав теорему о втором признаке равенства треугольников и записав, что дано: $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, можно предложить учащимся самим сообразить, как следует накладывать треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$, чтобы они совместились, а затем попросить одного из учащихся рассказать о своём способе доказательства.

После доказательства теоремы выполняется задание 37 (полностью или частично — в зависимости от наличия времени).

Задание на дом: п. 16; вопрос 11 (с. 71); задание 38.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 16 учащиеся должны не только знать формулировку и доказательство теоремы о втором признаке равенства треугольников, но и уметь провести сравнительный анализ двух способов наложения одного треугольника на другой, использованных в доказательствах этой и предыдущей теорем, сопоставляя способ наложения с условием теоремы; уметь решать задачи типа 37, осуществляя в задачах по готовым рисункам поиск, выделение и использование необходимой информации.

Урок 20 Третий признак равенства треугольников

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать теорему, выражающую третий признак равенства треугольников; рассмотреть задачи на применение этой теоремы.

Доказательство теоремы о третьем признаке равенства треугольников отличается от доказательств теорем о первом и втором признаках тем, что здесь не производится наложение одного треугольника на другой, а один треугольник прикладывается к другому, и затем используются теоремы об углах равнобедренного треугольника и о первом признаке равенства треугольников.

В учебнике подробно рассмотрен один из трёх случаев, который может возникнуть после того, как один треугольник приложен к другому. Для двух других случаев даны рисунки, и на рисунках приведены краткие доказательства. Целесообразно предложить учащимся самим разобраться в этих доказательствах, а затем попросить одного из них рассказать эти доказательства у доски.

Отметим, что доказательство теоремы о третьем признаке равенства треугольников можно провести, как и в случаях первого и второго признаков, путём наложения одного треугольника на другой. Приведём это доказательство.

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с соответственно равными сторонами (рис. 2, а). Наложим мысленно треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1 , сторона AB — с равной ей стороной A_1B_1 , а вершины C и C_1 оказались по одну сторону от прямой A_1B_1 . Докажем, что при этом наложении вершина C совместится с вершиной C_1 .

Предположим, что это не так (рис. 2, б). Тогда получатся два равнобедренных треугольника A_1CC_1 и B_1CC_1 с общим основанием CC_1 . Высоты этих треугольников, проведённые к основанию, являются также медианами, и, следовательно, они соединяют вершины A_1 и B_1 с серединой M основания CC_1 . Так как точка M не лежит на прямой A_1B_1 , то получается, что через точку M проходят две прямые (A_1M и B_1M), перпендикулярные к прямой CC_1 . Но этого не может быть, и, значит, наше предположение о том, что вершина C не совместится с вершиной C_1 , неверно. Итак, при рассматриваемом наложении вершина C совместится с вершиной C_1 , поэтому треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, и, следовательно, они равны.

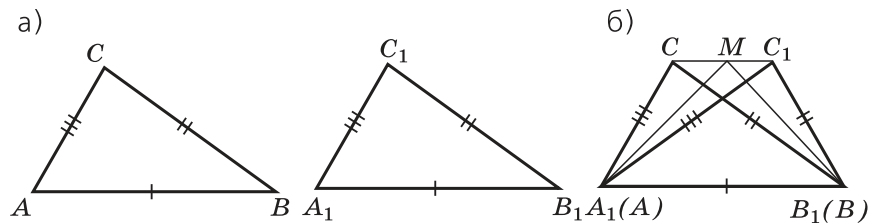


Рис. 2

После доказательства теоремы выполняется задание 39 (полностью или частично — в зависимости от наличия времени).

Задание на дом: п. 17; вопрос 12 (с. 71); задание 40.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 17 учащиеся должны не только знать формулировку и приведённое в учебнике доказательство теоремы о третьем признаке равенства треугольников, но и аргументировать необходимость рассмотрения трёх случаев и проводить в каждом из них доказательные рассуждения; уметь решать задачи типа 39, осуществляя в задачах по готовым рисункам поиск необходимой информации и выстраивая логическую цепь рассуждений.

Уроки 21, 22

Решение задач, связанных с признаками равенства треугольников

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: закрепить навыки применения теорем о признаках равенства треугольников при решении задач.

На уроках можно рассмотреть те задачи из заданий 35, 37, 39, которые не успели решить в классе, разобрать решения некоторых задач из домашних заданий 36, 38, 40, а также рассмотреть задачи с нечётными номерами из числа дополнительных задач к § 6 (задачи 60—72, с. 73, 74).

В конце первого урока либо на втором уроке целесообразно провести самостоятельную работу № 5.

Задание на дом: задачи 60—72 с чётными номерами.

Уроки 23, 24

Прямоугольник

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: ввести понятия четырёхугольника, его элементов, прямоугольника, квадрата; доказать теорему о противоположных сторонах прямоугольника и вывести следствия из неё.

С прямоугольником и квадратом учащиеся познакомились ещё в 5—6 классах. Теперь эти фигуры вводятся как определённые виды четырёхугольников. Поэтому сначала нужно рассказать, используя рисунок 90 учебника (или аналогичный рисунок на доске), какая фигура называется четырёхугольником, что такое его стороны, вершины и диагонали, какие стороны называются смежными и какие — противоположными.

Затем нужно ввести понятие прямоугольника и доказать теорему о том, что его противоположные стороны равны.

На первом уроке можно рассмотреть ещё следствие 1 из доказанной теоремы, позволяющее ввести понятие квадрата как прямоугольника, все стороны которого равны, и решить задачи 41 а), 41 б).

Задание на дом: п. 18; вопросы 13—15 (с. 71); задачи 42 а), 42 б).

На втором уроке нужно вывести следствия 2 и 3 из теоремы о противоположных сторонах прямоугольника. При выводе следствия 2 используется тот факт (он отмечен в сноске), что для любых двух отрезков существует прямоугольник, две смежные стороны которого равны этим отрезкам. Этот факт достаточно очевиден, и на нём не следует заострять внимание учащихся. Учитель же должен иметь в виду, что в данном курсе геометрии утверждение о существовании такого прямоугольника (с двумя заданными смежными сторонами) принимается в качестве одной из аксиом. Подробнее речь об этом пойдёт в 8 классе.

Следствие 3 выводится с помощью следствия 2. Но утверждение следствия 3 можно обосновать иначе — опираясь не на следствие 2, а непосредственно на аксиому существования прямоугольника с двумя заданными смежными сторонами. Приведём это обоснование.

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ углы DAB , ABC и BCD прямые (рис. 3, а). Требуется доказать, что угол CDA также прямой.

Рассмотрим прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$, в котором $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$ (рис. 3, б). Существование такого прямоугольника следует из вышеупомянутой аксиомы. Наложим прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ на четырёхугольник $ABCD$ так, чтобы совместились стороны A_1B_1 и AB , B_1C_1 и BC (это можно сделать, поскольку эти стороны соответственно равны и $\angle B_1 = \angle B$). Так как $\angle A_1 = \angle A$ и $\angle C_1 = \angle C$, то при данном наложении прямая A_1D_1 наложится на прямую AD , а прямая C_1D_1 — на прямую CD . Поэтому точка D_1 совместится с точкой D , и, следовательно, $\angle CDA = \angle C_1D_1A_1 = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

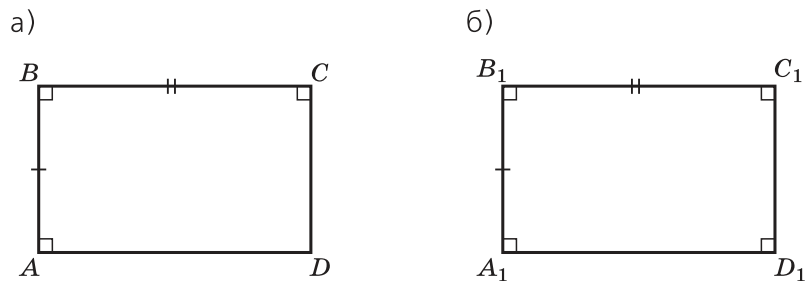


Рис. 3

Следствия 2 и 3 используются далее при решении задач из задания 41; на уроке можно решить несколько задач на усмотрение учителя.

Задание на дом: п. 18; вопросы 16, 17 (с. 71); задание 42 (такие же пункты, что и рассмотренные в классе из задания 41).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 18 учащиеся должны уметь объяснить, какая фигура называется четырёхугольником, что такое его стороны, вершины, диагонали, смежные стороны, противоположные стороны, какой четырёхугольник называется прямоугольником и какой прямоугольник называется квадратом; уметь формулировать и доказывать теорему о противоположных сторонах прямоугольника и следствия из неё, выделяя (сопоставляя) на каждом шаге доказательства то, что уже известно, и то, что предстоит установить; уметь решать задачи типа 41, выстраивая в задачах на доказательство логическую цепь рассуждений.

Урок 25 Виды треугольников

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятия остроугольного, тупоугольного и прямоугольного треугольников; доказать, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета, а перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой.

Учащиеся могут самостоятельно прочитать начало п. 19, где содержится доказательство утверждения: если один из углов треугольника тупой, то два других угла острые.

Из этого утверждения и следствия 2 из теоремы п. 18 следует, что в любом треугольнике либо все три угла острые, либо два угла острые, а третий прямой или тупой. В свою очередь, отсюда вытекает, что углы при основании равнобедренного треугольника острые.

В результате проведённых рассуждений приходим к выводу, что все треугольники разбиваются на три класса: остроугольные, тупоугольные, прямоугольные.

Далее нужно ввести названия для сторон прямоугольного треугольника: гипотенуза и катеты. Полезно (как и в других случаях) обратить внимание учащихся на происхождение этих названий (разъяснение содержится в учебнике). Затем нужно доказать, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета. В процессе доказательства на луче AB откладывается отрезок AM , равный катету AC (рис. 4). Здесь нужно пояснить учащимся, что, хотя точка M на рисунке отмечена на отрезке AB (на гипотенузе), заранее мы не знаем, где она окажется (на отрезке AB или на его продолжении за точку B). Поэтому в дальнейших рассуждениях мы никак не пользуемся тем, что отметили её на самом отрезке AB , а наоборот, из наших рассуждений следует, что точка M лежит на отрезке AB , и, следовательно, $AM < AB$.

Из доказанного утверждения следует, что перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой.

В связи с этим вводится понятие расстояния от точки до прямой — это длина перпендикуляра, проведённого из точки к прямой. Следует подчеркнуть, что расстояние от точки до прямой является наименьшим из расстояний от точки до всевозможных точек прямой.

При наличии времени можно решить задачу 73.

Задание на дом: п. 19; вопросы 18—22 (с. 71); задания 41 и 42 (те пункты, которые не были рассмотрены ранее).

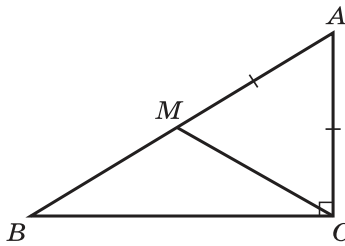


Рис. 4

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 19 учащиеся должны уметь формулировать и доказывать утверждения: 1) если один из углов треугольника тупой, то два других угла острые; 2) в любом треугольнике либо все три угла острые, либо

два угла острые, а третий прямой или тупой; 3) углы при основании равнобедренного треугольника острые; проводить классификацию треугольников по углам (остроугольный, тупоугольный, прямоугольный); знать названия сторон прямоугольного треугольника; уметь доказывать, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета, а перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой; уметь объяснить, что называется расстоянием от точки до прямой, и аргументировать это определение; постепенно приучаться к работе с текстом учебника.

Уроки 26, 27

Прямоугольный треугольник с углом в 30°

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать два утверждения: 1) катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы; 2) если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° ; рассмотреть задачи, при решении которых используются эти утверждения.

В начале первого урока можно предложить учащимся прочитать в учебнике доказательство первого утверждения, а затем предложить одному из них рассказать доказательство у доски.

Доказательство второго утверждения целесообразно рассказать учителю самому.

В классе можно решить задачи 43 а), 43 б).

Задание на дом: п. 20; вопросы 23, 24 (с. 71); задачи 44 а), 44 б).

Второй урок можно начать с того, чтобы один из учащихся рассказал доказательство второго утверждения у доски, а оставшееся время нужно посвятить решению задач 43 в), 43 г), 43 д). Особое внимание следует уделить простой задаче 43 д). Её решение приведено на с. 64.

Задание на дом: задачи 44 в), 44 г), 44 д).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 20 учащиеся должны не только знать формулировки и доказательства двух утверждений из этого пункта, но и уметь проводить сравнитель-

ный анализ этих двух утверждений, сопоставляя то, что дано в каждом из них, и то, что требуется доказать; уметь решать задачи типа 43, находя в некоторых из задач, например, в задаче 43 д), разные способы решения.

Урок 28

Признаки равенства прямоугольных треугольников

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: изучить признаки равенства прямоугольных треугольников и показать, как они применяются при решении задач.

Утверждения о первых четырёх признаках равенства прямоугольных треугольников непосредственно следуют из теорем о первом и втором признаках равенства треугольников, поэтому можно предложить учащимся обосновать эти утверждения, пользуясь рисунками 101—104 учебника.

Доказательство теоремы о ещё одном признаке равенства прямоугольных треугольников (по гипотенузе и катету) целесообразно рассказать учителю самому.

Усвоение рассмотренных признаков закрепляется в ходе решения задач из задания 45. При наличии времени можно решить несколько задач, а остальные — на следующих двух уроках.

Задание на дом: п. 21; вопросы 25, 26 (с. 71, 72); задание 46 (такие же пункты, что и рассмотренные в классе из задания 45). Более подготовленным учащимся можно предложить доказать теорему о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету другим способом — путём наложения одного треугольника на другой.

Приведём другое доказательство теоремы о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы A и A_1 прямые, $BC = B_1C_1$ и $AB = A_1B_1$ (рис. 5, а). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы катет AB совместился с равным ему катетом A_1B_1 , а катет AC наложился на луч A_1C_1 (рис. 5, б). Докажем, что при этом вершина C совместится с вершиной C_1 . Тогда треугольники полностью совместятся, и, значит, они равны.

Допустим, что точки C и C_1 не совместятся. Пусть, например, $AC > AC_1$ (рис. 5, б). Так как $B_1C_1 = BC$, то

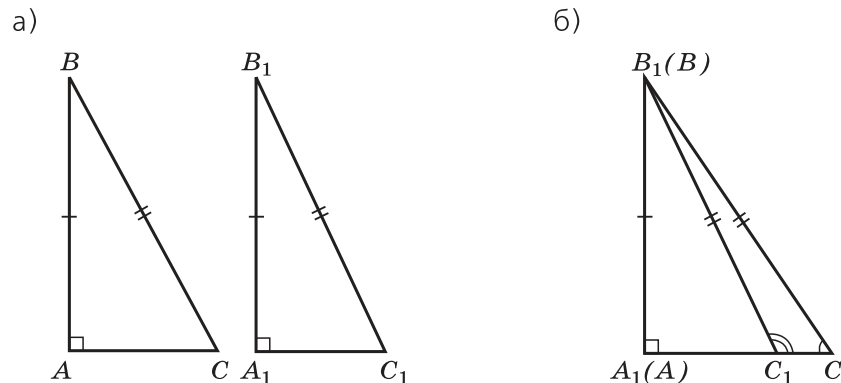


Рис. 5

получится равнобедренный треугольник C_1B_1C . Но угол B_1C_1C при основании этого треугольника тупой (поскольку он является смежным с острым углом $A_1C_1B_1$ прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$), чего не может быть. Следовательно, наше предположение о том, что точки C и C_1 не совместятся при описанном наложении, неверно. Таким образом, точки C и C_1 совместятся, и, значит, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 21 учащиеся должны уметь формулировать и доказывать утверждения о признаках равенства прямоугольных треугольников: по двум катетам, по катету и прилежащему острому углу, по гипотенузе и острому углу, по катету и противолежащему углу, по гипотенузе и катету; уметь решать задачи типа 45, осуществляя в каждой задаче поиск того признака равенства прямоугольных треугольников, которым позволяет воспользоваться условие задачи.

Уроки 29, 30

Серединный перпендикуляр к отрезку

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: ввести понятие серединного перпендикуляра к отрезку и доказать две теоремы (прямую и обратную), связанные с серединным перпендикуляром к отрезку; ввести понятие обратной теоремы, а также геометрического места точек.

В начале первого урока нужно ввести понятие серединного перпендикуляра к отрезку, обратив внимание на то, что серединный перпендикуляр — это прямая (в отличие от перпендикуляра, проведённого из точки к прямой, который является отрезком).

Далее следует рассмотреть теорему о серединном перпендикуляре к отрезку и ввести понятие обратной теоремы. Учащиеся должны твёрдо усвоить, что во всякой теореме есть условие (это то, что дано) и заключение (это то, что требуется доказать). Полезно выделить условие и заключение в нескольких из рассмотренных ранее теорем. Нужно подчеркнуть, что обратная теорема не всегда имеет место, т. е. обратное утверждение по отношению к доказанной теореме может быть неверным. Можно предложить учащимся самим сформулировать какие-то утверждения, обратные к которым не верны.

Чтобы учащиеся смогли сами сформулировать теорему, обратную теореме о серединном перпендикуляре к отрезку, нужно попросить их сформулировать прямую теорему в форме «если ..., то ...»: если точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку, то она равноудалена от концов этого отрезка. Поменяв местами условие и заключение, они должны прийти к формулировке обратной теоремы: если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку. Доказательство обратной теоремы учащиеся могут изучить дома по учебнику.

На уроке можно рассмотреть задачи 47 а), 47 б).

Задание на дом: п. 22 (до следствия); вопросы 27—29 (с. 72); задачи 48 а), 48 б).

На втором уроке нужно рассмотреть доказательство теоремы, обратной теореме о серединном перпендикуляре, предложив одному из учащихся рассказать доказательство у доски.

Затем следует сформулировать и вывести следствие из двух рассмотренных теорем (прямой и обратной), обратив внимание на то, что при выводе следствия используются обе теоремы.

После этого можно ввести понятие геометрического места точек и отметить, что серединный перпендикуляр к отрезку — это геометрическое место точек, равноудалённых от его концов.

В классе можно решить задачу 81, а также ещё не решённые задачи из задания 45.

Задание на дом: п. 22; вопрос 30 (с. 72); задачи 48 г), 82, оставшиеся задачи из задания 46.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 22 учащиеся должны уметь объяснить, что такое серединный перпендикуляр к отрезку, формулировать и доказывать теорему о серединном перпендикуляре к отрезку и обратную теорему; уметь объяснить, что такое условие и заключение теоремы и что такое обратная теорема; формулировать любую теорему в форме «если..., то...», приводить примеры утверждений, для которых обратное утверждение неверно, т. е. обратная теорема не имеет места; уметь решать задачи типа 47 а), 47 б).

Урок 31

Свойство биссектрисы угла

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать теорему о биссектрисе угла и обратную ей теорему.

Доказательство теоремы о биссектрисе угла учащиеся могут изучить самостоятельно по учебнику, после чего можно предложить одному из них рассказать доказательство у доски.

Чтобы сформулировать обратную теорему, полезно сначала дать формулировку прямой теоремы в форме «если ..., то ...»: если точка лежит на биссектрисе неразвёрнутого угла, то она равноудалена от сторон этого угла. Доказательство обратной теоремы также можно поручить учащимся изучить самостоятельно по учебнику, а затем вызвать ученика к доске, чтобы он рассказал доказательство.

Следствие из двух теорем (прямой и обратной) полностью аналогично следствию, рассмотренному в п. 22. Целесообразно, чтобы учащиеся сами провели доказательство этого следствия по аналогии с доказательством следствия из п. 22 (можно включить проведение доказательства в домашнее задание).

На уроке решается задача 47 в), при наличии времени — задача 79.

Задание на дом: п. 23; вопросы 31—33 (с. 72); задачи 48 в), 80.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 23 учащиеся должны проявить умение работать с текстом учебника; уметь формулировать и доказывать теорему о биссектрисе угла и обратную ей, чётко выделяя в каждой теореме то, что дано, и то, что требуется доказать; уметь решать задачи типа 47 в), 48 в).

Урок 32

Прямоугольные треугольники

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: повторить материал, связанный с прямоугольными треугольниками; провести самостоятельную работу.

Сначала в форме устного опроса повторяется материал, связанный с прямоугольными треугольниками (п. 18—23), а затем проводится самостоятельная работа № 6.

Задание на дом: варианты 3 и 4 самостоятельной работы № 6.

Урок 33

Проекция отрезка

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятия проекции точки и проекции отрезка на прямую; обсудить утверждение: проекцией отрезка, лежащего на одной из сторон острого угла, на другую сторону является отрезок; доказать теорему о проекциях равных отрезков и вывести два следствия из неё.

Вопросы, рассмотренные в п. 24 учебника, являются достаточно сложными, поэтому учителю следует самому объяснить учащимся материал этого пункта.

Начать нужно, как и в учебнике, с введения понятий проекции точки на прямую и проекции отрезка на прямую. Используя рисунок 111, а учебника или плакат, сделанный по этому рисунку, можно обратить внимание учащихся на то, что с наглядной точки зрения очевидно, что проекцией отрезка AB на прямую OQ является отрезок A_1B_1 , где A_1 и B_1 — проекции точек A и B на прямую OQ (рис. 6, а).

Но наглядная очевидность ещё не является доказательством, нужно провести рассуждения, чтобы обосновать

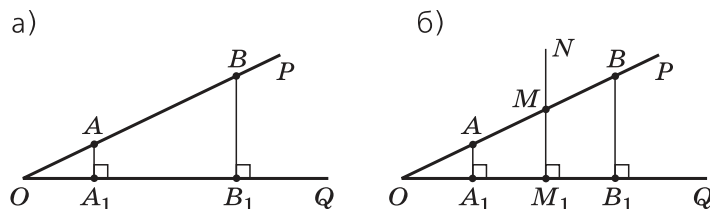


Рис. 6

этот наглядно очевидный факт. Вместе с тем рассмотрение доказательства не является обязательным. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса учитель должен сам решить, проводить доказательство или нет.

Если проводить, то прежде всего необходимо помочь учащимся понять, что же нужно доказывать. А доказать нужно два утверждения: что проекция каждой точки отрезка AB лежит на отрезке A_1B_1 и, наоборот, каждая точка отрезка A_1B_1 является проекцией некоторой точки отрезка AB .

Проведённые в учебнике рассуждения показывают, что если точка M_1 — проекция точки M отрезка AB на прямую OQ , то M_1 лежит между точками A_1 и B_1 (рис. 6, б) и, значит, лежит на отрезке A_1B_1 . А если M_1 — произвольная точка отрезка A_1B_1 , то прямая M_1N , перпендикулярная к прямой OQ , пересекает отрезок AB в некоторой точке M , и, следовательно, точка M_1 отрезка A_1B_1 является проекцией точки M отрезка AB . Тем самым проведённые рассуждения доказывают, что проекцией отрезка является отрезок.

Далее можно отметить, что точки A_1 и B_1 , а потому и весь отрезок A_1B_1 лежат на стороне OQ угла POQ , а не на её продолжении (можно предложить учащимся обосновать это, используя рисунок 112 учебника). Поэтому далее можно говорить о проекции отрезка, лежащего на одной из сторон острого угла, не на прямую, а на другую сторону этого угла.

Затем нужно доказать теорему о проекциях равных отрезков и вывести два следствия из неё. Учителю следует иметь в виду, что следствие 1 будет использоваться в начале 8 класса при доказательстве основной теоремы о параллельных прямых.

Вывод следствия 2 учащиеся могут изучить самостоятельно по учебнику.

При наличии времени в классе можно решить задачу 47 г).

Задание на дом: п. 24; вопросы 34—37 (с. 72); задачи 47 г) (если не успели решить в классе), 83.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 24 учащиеся должны уметь объяснить, что такое проекция точки и проекция отрезка на прямую; знать что проекцией отрезка, лежащего на одной из сторон острого угла, на другую сторону является отрезок; уметь формулировать и доказывать теорему о проекциях равных отрезков и следствия из неё; исследовать, какие возможны случаи в задаче 47 г).

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать теорему о неравенстве треугольника; рассмотреть задачи на применение этой теоремы.

Рассказав доказательство теоремы о неравенстве треугольника, учитель может задать вопросы учащимся, ответы на которые не содержатся непосредственно в тексте доказательства: 1) Почему точка H (рис. 118 учебника) не может совпасть с точкой B или с точкой C ? (**Ответ:** если допустить, например, что точка H совпадёт с точкой B , то получим неравенство $BC < CA$, так как катет меньше гипотенузы, а это неравенство противоречит условию $CA \leq BC$.) 2) Как доказать, что из неравенств $HB < BC$ и $CH < BC$ следует, что точка H лежит между точками B и C ? (**Ответ:** если предположить, что, например, точка B лежит между точками H и C , то получим неравенство $CH > BC$, которое противоречит неравенству $CH < BC$.)

После доказательства теоремы о неравенстве треугольника следует рассмотреть несколько задач из задания 49 (насколько позволит время).

Задание на дом: п. 25; вопрос 38 (с. 72); задание 50 (такие же задачи, что и рассмотренные в классе из задания 49).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 25 учащиеся должны уметь формулировать и проводить подробное доказательство теоремы о неравенстве треугольника, сопоставлять эту геометрическую теорему с реальной практикой (путь от одного места до другого самый короткий, если идёшь по прямой); уметь решать задачи типа 49.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать теорему: в треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона и обратную ей теорему: в треугольнике против бо́льшей стороны лежит больший угол; обсудить метод доказательства от противного (он применяется здесь при доказательстве обратной теоремы); рассмотреть задачи на применение доказанных теорем.

На первом уроке можно рассмотреть доказательства обеих теорем (прямой и обратной) и особо следует остановиться на способе доказательства обратной теоремы. Этот способ называется методом доказательства от противного, и он уже использовался ранее в доказательствах разных утверждений, например в доказательствах теоремы о единственности перпендикуляра и теоремы о противоположных сторонах прямоугольника, а также в рассуждениях, проведённых при ответах на вопросы, возникшие в ходе доказательства теоремы о неравенстве треугольника.

Можно предложить учащимся (в качестве домашнего задания) самим отыскать те из проведённых ранее рассуждений, в которых использовался метод доказательства от противного, а на втором уроке провести опрос по этому заданию.

Второй урок можно посвятить повторению доказанных на первом уроке теорем и решению задач. В классе решаются задачи из задания 51, при наличии времени задачи 87, 89.

Задание на дом: п. 26; вопросы 39—41 (с. 72); задание 52.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 26 учащиеся должны уметь формулировать и доказывать две теоремы этого пункта; чётко выделять в каждой из теорем то, что дано, и то, что требуется доказать; уметь объяснить, в чём заключается метод доказательства от противного; уметь анализировать доказанные ранее теоремы на предмет использования в них метода от противного; уметь решать задачи типа 51.

Уроки 37, 38

Сумма углов треугольника

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать теорему о сумме углов треугольника; вывести вытекающее из неё следствие о внешнем угле треугольника; рассмотреть задачи на применение этих утверждений.

В ходе доказательства теоремы о сумме углов треугольника доказано, что если углы B и C треугольника ABC острые, то основание A_1 высоты AA_1 лежит между точками B и C (рис. 7). Обоснование этого утверждения основано на том, что если точка A лежит на стороне острого угла, то

её проекция A_1 на прямую, содержащую другую сторону угла, лежит на другой стороне угла, а не на её продолжении. Это было установлено на с. 59, 60 учебника. Учителю следует обратить внимание учащихся на этот момент доказательства.

После доказательства теоремы о сумме углов треугольника можно решить задачу 53 а), затем ввести понятие внешнего угла треугольника, вывести следствие из теоремы, относящееся к внешнему углу, и перейти к решению следующих задач из задания 53.

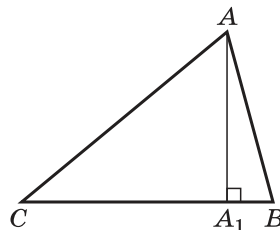


Рис. 7

Задание на дом: п. 27; вопросы 42, 43 (с. 73); задачи 54 а), 54 б), 54 в), 54 г).

На втором уроке можно повторить теорему о сумме углов треугольника и её следствие о внешнем угле треугольника и продолжить решение задач из задания 53.

В конце урока рекомендуется провести самостоятельную работу № 7.

Задание на дом: п. 27; задачи 54 д), 54 е), 54 ж), 54 з).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 27 учащиеся должны уметь формулировать и доказывать теорему о сумме углов треугольника; уметь объяснить, какой угол называется внешним углом треугольника, формулировать и доказывать утверждение о внешнем угле; уметь решать задачи типа 53.

Уроки 39, 40

Решение задач по теме «Треугольники»

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: решать задачи; подготовиться к контрольной работе.

В ходе уроков решаются задачи из заданий 49—54, не рассмотренные ранее, а также некоторые из дополнительных задач 55—98 к главе 2 (на усмотрение учителя).

В конце второго урока можно провести математический диктант № 2.

Задание на дом: задачи из числа дополнительных задач 55—98 (на усмотрение учителя).

Урок 41

Контрольная работа № 2

Ответы и указания

Вар. 1. 1. Указание. Треугольники BMP и BNP равны по первому признаку равенства треугольников. 2. Указание. $AC < AB = 2BC$. 3. Указание. Отложить на луче DB отрезок DE , равный AD . 4. Да. Указание. Провести медиану в прямоугольном треугольнике с острым углом в 30° .

Вар. 2. 1. Указание. Треугольники MBP и NBP равны по третьему признаку равенства треугольников, поэтому точка P лежит на биссектрисе угла B . 2. 60° . Указание. Углы треугольника равны 30° , 60° и 90° , причём $\angle C < \angle A < \angle B$. 3. Указание. Провести из точки D перпендикуляр DH к прямой AB и сравнить в треугольнике BDH катет DH , равный CD , и гипотенузу BD . 4. Да. Указание. Рассмотреть равнобедренный прямоугольный треугольник.

Вар. 3. 1. Указание. Если $AB = BC$ и $AD = DC$, то точки B и D лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AC . 2. Указание. Пусть BH — высота треугольника ABC . Сначала доказать, что $BM = MH$ и $BN = NH$. 3. Нет. Указание. Предположить, что треугольники ABD и ACD равны, и доказать, что тогда $\angle B = \angle C$. 4. Нет. Указание. У рассматриваемого треугольника есть угол меньше 60° , поэтому после разрезания на треугольники у одного из них будет угол меньше 60° .

Вар. 4. 1. Указание. Если $AB = AD$ и $CB = CD$, то треугольники ABC и ADC равны по третьему признаку равенства треугольников. 2. Указание. Сначала провести высоту BH и доказать, что MN — серединный перпендикуляр к отрезку BH . 3. Указание. Отметим на лучах AB и AC точки C_1 и B_1 так, что $AC_1 = AC$ и $AB_1 = AB$. Пусть отрезки BC и B_1C_1 пересекаются в точке O . Тогда $BO + B_1O > BB_1$, $CO + C_1O > CC_1$ и $B_1C_1 = BC$. Поэтому $2BC = BO + OC + B_1O + OC_1 > BB_1 + CC_1 = AB + AC$. 4. Нет. Указание. Пусть D — точка на стороне BC треугольника ABC . Предположить, что треугольники ABD и ACD равны, и доказать, что тогда $\angle B = \angle C$.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятие определения; дать определение окружности; доказать, что никакие три точки окружности не лежат на одной прямой.

В п. 28 учебника впервые появляется понятие определения. В связи с этим нужно показать учащимся, что ранее уже были определения некоторых геометрических фигур (например, угла, треугольника, прямоугольника, биссектрисы, медианы, высоты треугольника и т. д.), а также определения некоторых геометрических понятий (например, понятия равенства геометрических фигур, понятия перпендикулярности двух прямых и т. д.).

Затем следует дать определение окружности и связанных с ней понятий (центр, радиус, диаметр, круг). При этом нужно использовать рисунки 127—129 учебника либо соответствующие им плакаты.

Можно отметить, что: 1) окружность наряду с треугольником является одной из важнейших фигур в геометрии и фактически весь учебник геометрии 7 класса посвящён вопросам, связанным с треугольниками и окружностями; 2) окружности и круги постоянно встречаются в окружающей нас обстановке (различные кольца, обручи, тарелки, монеты и т. д.).

Далее нужно доказать утверждение: никакие три точки окружности не лежат на одной прямой, обратив внимание учащихся на метод доказательства (от противного). Целесообразно отметить, что с наглядной точки зрения это утверждение очевидно: какую бы прямую мы ни провели, она будет иметь с данной окружностью не более двух общих точек. Однако, как и во многих других случаях, эта наглядная очевидность ещё не является доказательством утверждения, а для обоснования утверждения нужно провести доказательные рассуждения.

В классе решаются задачи из задания 99.

Задание на дом: п. 28; вопросы 1—4 (с. 102); задание 100.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 28 учащиеся должны уметь объяснить, что такое определение; приводить примеры определений из уже пройденного материала, формулировать определения окружности и связанных с ней понятий (центр, радиус, диаметр, круг); уметь доказывать утверж-

дение о том, что никакие три точки окружности не лежат на одной прямой, выстраивая в процессе доказательства логическую схему, характерную для метода доказательства от противного; уметь решать задачи типа 99.

Уроки 43, 44

Взаимное расположение прямой и окружности

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: рассмотреть различные случаи взаимного расположения прямой и окружности; ввести понятие касательной к окружности.

Первый урок можно начать с наглядной демонстрации различных случаев взаимного расположения прямой и окружности: прямую, не имеющую общих точек с окружностью, начинаем перемещать так, чтобы расстояние от центра окружности до прямой уменьшалось (либо окружность начинаем приближать к прямой), тогда в некоторый момент прямая коснётся окружности, а затем будет пересекать её в двух точках.

После этого можно сформулировать задачу: нужно выяснить, сколько общих точек имеют прямая и окружность в зависимости от соотношения между расстоянием d от центра окружности до прямой и радиусом r окружности.

Учителю следует самому провести в соответствии с текстом учебника и рисунками 134—136 рассуждения в каждом из трёх возможных случаев. Наиболее сложными для восприятия учащихся являются рассуждения в первом случае ($d < r$), хотя с наглядной точки зрения наличие двух общих точек у прямой и окружности в этом случае не вызывает сомнений. Здесь можно ещё раз подчеркнуть, что в геометрии наглядность должна сочетаться со строгой логикой, и поэтому для доказательства даже наглядно очевидных утверждений приходится иногда проводить весьма непростые рассуждения.

При рассмотрении первого и второго ($d = r$) случаев вводятся соответственно понятия секущей по отношению к окружности и касательной к окружности. Они играют в дальнейшем важную роль и должны быть твёрдо усвоены учащимися.

При наличии времени можно решить задачу 101 а).

Второй урок следует посвятить повторению теоретического материала, изученного на первом уроке, и решению задач 101 а), 101 б), 101 в).

Задание на дом: п. 29; вопросы 5—7 (с. 102); задачи 102 а), 102 б), 102 в).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 29 учащиеся должны уметь формулировать постановку задачи о взаимном расположении прямой и окружности, высказывать априорные предположения о возможных случаях их взаимного расположения, основанные на наглядных представлениях, уметь проводить обоснование в каждом из возможных случаев, усвоить новую терминологию и уметь объяснить, какая прямая называется секущей по отношению к окружности и какая — касательной к окружности; уметь проводить обоснование в каждом из возможных случаев; решать задачи типа 101 а), 101 б), 101 в).

Уроки 45, 46

Касательная

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать теорему о свойстве касательной, утверждение об отрезках касательных, проведённых из одной точки, и теорему, выражающую признак касательной; рассмотреть задачи на применение этих теорем.

На первом уроке можно рассмотреть теорему о свойстве касательной и утверждение об отрезках касательных, проведённых из одной точки. Поскольку доказательства этих теорем достаточно короткие и простые, учащиеся могут изучить их в классе самостоятельно по учебнику.

На втором уроке целесообразно повторить путём устного опроса материал первого урока и рассмотреть теорему, обратную теореме о свойстве касательной (признак касательной). Полезно отметить, что такая ситуация, когда в теореме обосновывается свойство некоторой геометрической фигуры, а обратная теорема выражает признак этой фигуры, встречается уже не в первый раз. Можно вспомнить теорему об углах равнобедренного треугольника, выражающую его свойство: углы при основании равнобедренного треугольника равны, и обратную теорему, выражающую признак равнобедренного треугольника: если два угла треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

Можно отметить также, что в таких случаях формулировки двух теорем (прямой и обратной) можно объединить в одну, используя словосочетание «тогда и только тогда». Например, теоремы о свойстве касательной и о признаке касательной можно сформулировать так: прямая, проходящая через данную точку окружности, является касательной к этой окружности тогда и только тогда, когда она перпендикулярна к радиусу, проведённому в данную точку.

Весьма трудным для учащихся является вопрос о том, какая из двух теорем при такой формулировке связана со словом «тогда» и какая со словами «только тогда». Иначе говоря, что дано и что требуется доказать, если в формулировке оставить слово «тогда» (слова «только тогда») и отбросить слова «и только тогда» (слова «тогда и»). Более простым для понимания учащихся является первый случай, когда оставлено слово «тогда» и отброшены слова «и только тогда». В этом случае дано, что прямая проходит через точку окружности и перпендикулярна к радиусу, проведённому в эту точку, а требуется доказать, что данная прямая является касательной. Таким образом, со словом «тогда» связана теорема о признаке касательной, а со словами «и только тогда» — теорема о свойстве касательной.

Учащимся полезно самим сформулировать некоторые теоремы с использованием словосочетания «тогда и только тогда».

На уроках решаются задачи 101 г), 101 д), 101 е), 101 ж), при наличии времени — задача 110.

Задание на дом: п. 30; вопросы 8—10 (с. 102); задачи 102 г), 102 д), 102 е), 102 ж).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 30 учащиеся должны не только знать формулировки и доказательства теоремы о свойстве касательной и обратной теоремы, но и уметь формулировать обе теоремы вместе с использованием словосочетания «тогда и только тогда», понимать и уметь объяснить, какая из теорем связана со словом «тогда», а какая со словами «только тогда», приводить другие примеры прямой и обратной теорем, допускающих подобную формулировку; уметь формулировать и доказывать утверждение об отрезках касательных, проведённых из одной точки; проявить умение работать с текстом учебника; уметь решать задачи типа 101 г), 101 д), 101 е), 101 ж).

Урок 47 **Хорды и дуги**

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятия хорды и дуги окружности, полуокружности, центрального угла и градусной меры дуги.

Используя рисунки 140, 141 учебника или соответствующие им плакаты, нужно ввести следующие понятия: хорда (можно отметить, что диаметр окружности — это хор-

да, проходящая через центр окружности), дуга окружности, полуокружность, а затем с помощью рисунка 142 учебника — понятия центрального угла и градусной меры дуги окружности.

Следует обратить внимание учащихся на обозначение градусной меры дуги (оно такое же, как и для самой дуги) и отметить, что сумма градусных мер двух дуг с общими концами равна 360° (можно сказать, что это градусная мера всей окружности).

На уроке решаются задачи 103 а), 103 б), при наличии времени можно решить также задачу 111.

Задание на дом: п. 31; вопросы 11—14 (с. 102); задание 104.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 31 учащиеся должны усвоить новую терминологию и уметь объяснить, что такое хорда и дуга окружности, полуокружность, центральный угол и как вводится градусная мера дуги окружности; уметь решать задачи типа 103.

Урок 48 **Угол между касательной и хордой**

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать теорему об угле между касательной и хордой; рассмотреть задачи на применение этой теоремы.

Вводя понятие угла между касательной и хордой, учителю следует подчеркнуть, что для данных касательной и хорды таких углов два, они являются смежными (рис. 144 учебника).

После доказательства теоремы об угле между касательной и хордой полезно решить задачи 105 а), 105 б).

Задание на дом: п. 32; вопрос 15 (с. 102); задачи 106 а), 106 б).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 32 учащиеся должны уметь объяснить, какой угол называется углом между касательной и хордой; формулировать и доказывать теорему об угле между касательной и хордой; уметь решать задачи типа 105 а), 105 б).

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: ввести понятие вписанного угла; доказать теорему о вписанном угле и вывести следствия из неё; рассмотреть задачи на применение этой теоремы и следствий из неё.

На первом уроке нужно ввести понятие вписанного угла, обратив внимание учащихся на связанную с ним терминологию: «вписанный угол опирается на дугу, заключённую внутри этого угла».

После этого следует сформулировать теорему о вписанном угле, и можно предложить учащимся самим доказать её, сделав подсказку: через вершину B вписанного угла ABC нужно провести касательную к окружности и далее воспользоваться теоремой об угле между касательной и хордой. Одного из учащихся можно вызвать к доске для объяснения доказательства.

Целесообразно сразу же после доказательства теоремы рассмотреть два следствия из неё. Прежде чем сформулировать их, можно задать учащимся вопросы: что можно сказать о двух вписанных углах, опирающихся на одну и ту же дугу? чему равен вписанный угол, опирающийся на полуокружность?

Утверждение о том, что если диаметром окружности является гипотенуза прямоугольного треугольника, то вершина прямого угла лежит на этой окружности, также можно предложить учащимся доказать самим.

Если останется время, то на первом уроке можно решить задачи 105 в), 105 г).

Задание на дом: п. 33; вопросы 16—19 (с. 102, 103); задачи 106 в), 106 г), 106 д).

Второй урок целесообразно посвятить решению задач из задания 105.

В конце урока полезно провести самостоятельную работу № 8.

Задание на дом: задачи 106 е), 106 ж), 106 з).

Основные требования к учащимся

В процессе изучения п. 33 учащиеся должны проявить способность к самостоятельному поиску доказательств теоремы о вписанном угле и её следствий; уметь изложить найденное доказательство; в результате изучения это-

го пункта они должны уметь формулировать определение вписанного угла, формулировать и доказывать теорему о вписанном угле и следствия из неё; уметь решать задачи типа 105.

Урок 51 Решение задач

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: закрепить навыки в решении задач, связанных с окружностью.

На уроке можно решить некоторые из дополнительных задач 112—122 (на усмотрение учителя), повторяя в ходе их решения теоретический материал пунктов 28—33.

Задание на дом: оставшиеся из задач 112—122.

Урок 52 Построения циркулем и линейкой. Построение треугольника по трём элементам

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: дать представление о новом классе задач — на построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки без делений; рассмотреть одну из простейших и в то же время важнейших (базовых) задач на построение — построение треугольника по трём сторонам.

Начиная урок, можно напомнить учащимся, что для изображения геометрических фигур используются различные чертёжные инструменты, в частности для построения отрезка заданной длины нужна линейка с миллиметровыми делениями, а для построения угла заданной градусной меры нужен транспортир. Но оказывается, многие построения в геометрии могут быть выполнены с помощью только циркуля и линейки без делений. Задачами на построение называются в геометрии именно такие задачи, в которых требуется построить какую-то фигуру с помощью только этих двух инструментов — циркуля и линейки без делений.

Следует особо отметить те простейшие построения, которые можно выполнить с помощью каждого из этих инструментов: с помощью линейки без делений можно провести произвольную прямую, а также прямую через две заданные точки, с помощью циркуля — произвольную окружность, а также окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку.

Одной из простейших задач на построение является задача: на данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному отрезку. Уже на примере этой задачи следует объяснить учащимся, что здесь дано и что требуется сделать: даны отрезок AB и луч OC (рис. 153, *а* учебника), требуется на луче OC построить такую точку D , что $OD = AB$ (рис. 153, *б* учебника).

Затем можно перейти к задаче о построении треугольника по трём сторонам. Здесь снова нужно прежде всего довести до понимания учащихся постановку задачи: что дано (три отрезка) и что требуется построить (треугольник, стороны которого соответственно равны этим отрезкам). Описанное в учебнике и объяснённое учителем построение учащимся полезно выполнить в тетрадях.

После этого учителю следует разъяснить учащимся, что задача о построении треугольника, стороны которого равны соответственно трём данным отрезкам, не всегда имеет решение. Так будет, если какой-то из данных отрезков больше или равен сумме двух других. Можно предложить учащимся взять три отрезка, один из которых больше суммы двух других, и попытаться повторить с ними те же построения, которые делались вначале с тремя другими отрезками.

Полезно также отметить, что задача о построении треугольника по трём сторонам является одной из важнейших (базовых) задач на построение в том смысле, что она часто используется при решении других, более сложных задач на построение.

В классе можно решить задачи 107 а), 107 б).

Решение задачи 107 а) сводится к откладыванию на лучах CB и BA отрезков CA_1 и BC_1 , равных AB_1 (решение этой задачи приведено на с. 80).

Обсуждая задачу 107 б), следует обратить внимание учащихся на то, что при решении задач на построение часто поступают так: рисуют искомую фигуру и затем, исходя из рисунка, намечают ту последовательность построений с помощью циркуля и линейки, которая приводит в результате к построению искомой фигуры (решение задачи 107 б) приведено на с. 80, 81).

Задание на дом: пп. 34, 35; вопрос 20 (с. 103); задачи 108 а), 108 б).

Основные требования к учащимся

В результате изучения пп. 34 и 35 учащиеся должны уметь объяснить, что понимается в геометрии под словами «задача на построение»; уметь строить треугольник по трём сторонам; знать, что эта задача не всегда имеет решение.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: рассмотреть базовую задачу о построении угла, равного данному; сформировать умение решать другие задачи на построение с помощью этой базовой задачи.

Рассказывая решение задачи о построении угла, равного данному, учителю снова следует акцентировать внимание учащихся на том, что в этой задаче дано (угол и луч) и что требуется построить (угол, равный данному углу, одной из сторон которого будет данный луч). По ходу рассказа можно отметить, что искомым углов два — вторая сторона искомого угла может лежать как по одну, так и по другую сторону от прямой OM (рис. 157 учебника).

Полезно также отметить, что при решении данной задачи фактически используется рассмотренная на предыдущем уроке задача о построении треугольника по трём сторонам. В самом деле, сначала на сторонах угла A были отмечены точки B и C , а затем выполнены все те построения, которые нужно сделать, чтобы построить треугольник OPQ по трём сторонам: $OP = AB$, $OQ = AC$ и $PQ = BC$.

После рассмотрения задачи о построении угла, равного данному, целесообразно решить задачи о построении треугольника по двум сторонам и углу между ними и по стороне и прилежащим к ней углам.

Решения этих, а также последующих задач на построение полезно разбить на несколько этапов, на каждом из которых выполняется какое-то простейшее построение: откладывание на луче от его начала отрезка, равного данному; построение угла, равного данному, и т. д. Нужно постепенно подвести учащихся к пониманию того, что в задачах на построение главную роль играют не сами построения, а нахождение той последовательности простейших (базовых) построений, которая приводит к решению задачи.

В классе при наличии времени можно решить задачи 107 в), 107 г), 107 д).

Задание на дом: п. 36; вопросы 21—23 (с. 103); задачи 108 в), 108 г), 108 д).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 36 учащиеся должны уметь откладывать от данного луча угол, равный данному, строить треугольник по двум сторонам и углу между ними,

а также по стороне и двум прилежащим к ней углам; а кроме того, начать усваивать логическую цепочку в решении задач на построение, исходным пунктом которой является анализ с поиском пути решения.

Урок 54

Построение биссектрисы угла

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: рассмотреть базовую задачу о построении биссектрисы данного неразвёрнутого угла; сформировать умение решать другие задачи на построение с помощью этой базовой задачи.

В ходе решения задачи о построении биссектрисы данного неразвёрнутого угла строятся две окружности радиуса BC с центрами B и C (рис. 158, б, в учебника). Утверждается, что они пересекутся в двух точках, и даётся ссылка на задачу 109, в которой предлагается доказать это утверждение. Завершив построение биссектрисы данного неразвёрнутого угла, учителю следует вернуться к задаче 109 и рассказать, как она решается. Решение этой задачи приведено на с. 84, 85.

Полезно познакомить учащихся с задачей о трисекции угла, отметив при этом, что для некоторых углов эта задача имеет решение. Можно предложить им самим найти такие углы, которые можно разделить с помощью циркуля и линейки на три равных угла.

В классе можно решить задачи 107 е), 107 ж), 107 з).

Для построения угла в 60° нужно провести какой-нибудь отрезок AB и затем построить две окружности радиуса AB с центрами A и B . Они пересекутся в двух точках (задача 109), одну из которых обозначим буквой C . Треугольник ABC равносторонний, и, следовательно, любой его угол является искомым углом в 60° . Построив биссектрису угла в 60° , получим угол, равный 30° .

Задание на дом: п. 37; вопрос 24 (с. 103); задачи 108 е), 108 ж), 108 з), для более подготовленных учащихся также задачи 132, 133.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 37 учащиеся должны уметь строить биссектрису данного неразвёрнутого угла; решать задачи типа 107 е), 107 ж), составляя план решения, где на каждом этапе выполняется какое-то одно из простейших (базовых) построений.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: рассмотреть базовую задачу о построении серединного перпендикуляра к данному отрезку; сформировать умение решать другие задачи на построение с помощью этой базовой задачи.

В ходе решения задачи о построении серединного перпендикуляра к данному отрезку AB проводятся две окружности радиуса AB с центрами A и B (рис. 159, б, в учебника). Тот факт, что они пересекутся в двух точках — P и Q , следует из утверждения задачи 109, рассмотренной на предыдущем уроке.

Завершив построение серединного перпендикуляра PQ к данному отрезку AB , следует отметить, что попутно мы решили ещё одну задачу на построение: построили середину отрезка AB . Искомой серединой является точка пересечения прямой PQ и отрезка AB .

В классе можно решить задачи 107 и), 107 к), 107 л).

В задаче 107 к) наряду с построением нужно ответить на вопрос: сколько решений может иметь эта задача? Ответ на этот вопрос таков: количество решений зависит от соотношения между расстоянием d от точки C до серединного перпендикуляра p к отрезку AB и длины отрезка AB . Более подробный ответ на вопрос дан на с. 81, 82, где приведено решение задачи 107 к).

В задаче 107 л) наряду с построением нужно ответить на вопрос: всегда ли эта задача имеет решение? Ясно, что задача имеет решение, если серединный перпендикуляр p к отрезку AB пересекается с прямой a — точка их пересечения и является искомой точкой. Но прямые p и a могут не пересекаться. Так будет, если $AB \perp a$ (рис. 8). Поскольку $p \perp AB$, то в этом случае прямые p и a перпендикулярны к прямой AB и, следовательно, не пересекаются.

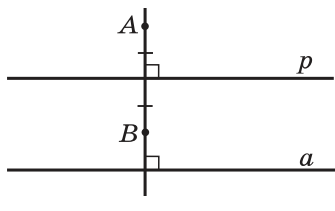


Рис. 8

Задание на дом: п. 38; вопросы 25, 26 (с. 103); задачи 108 и), 108 к), 108 л).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 38 учащиеся должны уметь строить серединный перпендикуляр к данному отрезку

и середину данного отрезка, решать задачи типа 107 и), 107 к), 107 л), формируя при этом умение составлять план решения задачи, развивая потребность в обосновании проведённого построения и исследовании возможных ситуаций в зависимости от исходных данных (существование решения, количество решений).

Урок 56

Построение прямой, перпендикулярной к данной. Построение прямоугольного треугольника: по двум катетам; по катету и острому углу

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: рассмотреть базовую задачу о построении прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой; сформировать умение решать другие задачи на построение с помощью этой базовой задачи.

Задача о построении прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой, сводится к уже известной задаче о построении серединного перпендикуляра к отрезку. Поэтому можно предложить учащимся прочитать на уроке п. 39 учебника и выполнить в тетрадях построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой.

Затем можно рассмотреть две задачи о построении прямоугольного треугольника: а) по двум катетам; б) по катету и прилежащему острому углу (эти задачи сформулированы в начале п. 40 учебника), а также задачи 107 м), 107 н).

Решение этих задач следует начинать с уточнения их постановки: что дано и что требуется построить. Так, в задаче о построении прямоугольного треугольника по двум катетам даны два отрезка, и требуется построить прямоугольный треугольник, катеты которого равны этим отрезкам. В задаче 107 н) даны отрезок и угол и требуется построить равнобедренный треугольник, у которого высота, проведённая к основанию, равна данному отрезку, а угол при основании равен данному углу.

Задание на дом: п. 39; вопросы 27, 28 (с. 103); задачи о построении прямоугольного треугольника: по гипотенузе и острому углу; по катету и противолежащему углу, а также 108 м), 108 н).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 39 учащиеся должны уметь строить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой, строить прямоугольный треугольник: по двум катетам, по гипотенузе и острому углу; по катету и любому из острых углов; уметь чётко объяснить, что дано в каждой из задач, что требуется сделать и из каких простейших (базовых) построений составляется решение задачи.

Урок 57 Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: рассмотреть одну из важнейших базовых задач на построение — задачу о построении прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету; сформировать умение решать другие задачи на построение с помощью этой базовой задачи.

В п. 40 учебника рассмотрены два способа решения задачи о построении прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету (рис. 9).

Рассказывая о первом способе в соответствии с текстом учебника, полезно обратить внимание учащихся на обоснование того факта, что проведённая прямая a пересекает окружность радиуса MN с центром B в двух точках (рис. 9, б). Это следует из того, что расстояние BA от центра окружности до прямой a меньше радиуса MN этой окружности, а в таком случае, как было показано в п. 29, прямая и окружность пересекаются в двух точках.

Во втором способе построения прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету используется точка L пересече-

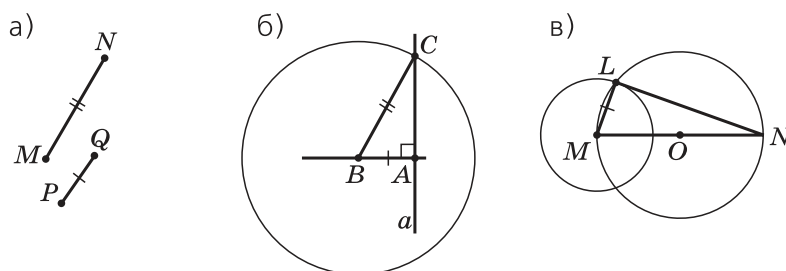


Рис. 9

ния окружности с центром O радиуса OM и окружности с центром M радиуса PQ (рис. 9, в). С наглядной точки зрения существование точки L очевидно, однако целесообразно поставить вопрос о том, как доказать, что точка L пересечения двух указанных окружностей существует. Это нетрудно сделать, используя тот факт, что прямоугольный треугольник с гипотенузой и катетом, равным данным отрезкам MN и PQ , существует, — это мы доказали, построив такой треугольник первым способом (треугольник ABC на рисунке 9, б).

Если переместить (мысленно) треугольник ABC так, чтобы вершины B и C совместились соответственно с точками M и N , то вершина A прямого угла совместится с некоторой точкой L , лежащей на окружности с диаметром MN , а поскольку сторона BA , равная отрезку PQ , совместится при этом с отрезком ML , то точка L лежит также на окружности с центром M радиуса PQ . Это и доказывает, что указанные окружности пересекаются в точке L .

В классе решаются задачи 107 з) для угла в 30° , 108 м) для угла в 150° , 107 о), 107 п).

Задача 107 з) уже была решена на одном из предыдущих уроков. Но там сначала строился угол в 60° , а затем проводилась биссектриса этого угла. Теперь можно предложить другой способ построения угла в 30° , используя построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету: нужно взять какой-нибудь отрезок и построить прямоугольный треугольник, у которого один из катетов равен этому отрезку, а гипотенуза вдвое больше данного катета. Угол треугольника, лежащий против этого катета, равен 30° . Угол в 150° (задача 108 м)) можно построить как смежный с углом в 30° .

Целесообразно перед рассмотрением описанного способа построения угла в 30° поставить перед учащимися вопрос: как построить какой-нибудь прямоугольный треугольник, у которого один из углов равен 30° ?

Задание на дом: п. 40; вопрос 29 (с. 103); задачи 108 о), 108 п).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 40 учащиеся должны уметь строить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету двумя способами, решать задачи типа 107 о), 107 п), обращая внимание на возможность решения одной и той же задачи разными способами, проводя в этом направлении поисковую работу, сопоставляя найденные разные решения с позиций их эффективности и красоты решения.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: рассмотреть базовую задачу о проведении через данную точку касательной к данной окружности; продолжить формирование умения учащихся решать задачи на построение.

Способ решения этой задачи зависит от того, как расположена данная точка A по отношению к данной окружности с центром O .

Если точка A лежит на окружности, то задача сводится к построению прямой a , проходящей через точку A перпендикулярно к прямой OA (рис. 163 учебника), а это — одна из базовых задач на построение, её решение описано в п. 39. Здесь можно ещё раз обратить внимание учащихся на то, что при решении различных задач на построение главное заключается в том, чтобы указать ту последовательность базовых построений, которая приводит к требуемому результату — построению искомой фигуры.

Если данная точка A лежит внутри круга, ограниченного данной окружностью, то задача не имеет решения. Можно поставить перед учащимися вопрос: как доказать, что в этом случае любая прямая, проходящая через точку A , будет секущей по отношению к данной окружности?

Доказательство указанного утверждения опирается на результаты, полученные в п. 29 при рассмотрении возможных случаев взаимного расположения прямой и окружности. Так как точка A лежит внутри круга, то $OA < r$, где r — радиус окружности.

С другой стороны, расстояние d от точки O до произвольной прямой a , проходящей через точку A , равно длине перпендикуляра, проведённого из точки O к прямой a (рис. 10). Но $OH \leq OA$ (равенство выполняется в случае, когда точки H и A совпадают). Таким образом, $d = OH \leq OA < r$, т. е. $d < r$. А в таком случае, как доказано в п. 29, прямая a является секущей по отношению к окружности.

Наконец, если точка A лежит вне круга, ограниченного данной окружностью, то, рассматривая искомую касательную (рис. 164, a учебника), приходим к выводу, что решение задачи сводится в этом случае к построению прямоугольного треугольника AOB с данной гипотенузой OA и катетом OB ,

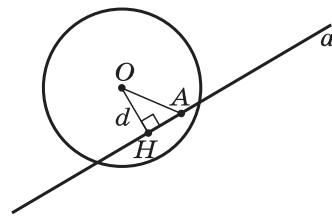


Рис. 10

равным радиусу данной окружности. Таким образом, и в этом случае задача сводится к одной из рассмотренных ранее базовых задач.

Можно ещё раз обратить внимание учащихся на то, что при решении задач на построение часто поступают именно так, как в рассмотренном выше случае: сначала рисуют (чертят) искомую фигуру и устанавливают связи между данными задачи и искомыми элементами. Эта часть решения называется анализом. Анализ даёт возможность составить план решения задачи, т. е. определить ту последовательность базовых построений, выполнив которые мы получим искомую фигуру.

После этого нужно доказать, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи. И наконец, можно рассмотреть вопрос о том, при любых ли данных задача имеет решение, и если имеет, то сколько решений. Все названные этапы объединяются в такую цепочку: анализ — построение — доказательство — исследование.

Но в 7 классе рассматриваются, как правило, достаточно простые задачи на построение, и поэтому отдельные части полной схемы, например анализ или исследование, можно опустить, ограничиваясь только выполнением построения. В отдельных случаях можно провести устно анализ и доказательство, а элементы исследования должны присутствовать лишь тогда, когда это оговорено условием задачи (см., например, задачи 107 к), 107 л)). Более сильным учащимся, проявляющим большой интерес к геометрии, полезно решать задачи на построение по полной схеме.

В классе можно решить задачу 107 р), а также при наличии времени некоторые из дополнительных задач 123—133 (на усмотрение учителя).

Задание на дом: п. 41; вопрос 30 (с. 103); задача 108 р), а также некоторые из дополнительных задач 123—133 (на усмотрение учителя).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 41 учащиеся должны уметь строить касательную к данной окружности, проходящую через данную точку; решать задачи типа 107 р); усвоить и уметь объяснить (это требование относится к наиболее сильным учащимся) классическую схему решения задач на построение: анализ — построение — доказательство — исследование, приводить примеры решения задач по полной схеме.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: закрепить навыки решения задач по теме «Окружность», подготовиться к контрольной работе.

На уроках можно использовать задачи 109—133 (на усмотрение учителя). На первом уроке целесообразно провести самостоятельную работу № 10, а на втором — математический диктант № 3.

Задание на дом: задачи 109—133 (на усмотрение учителя).

Ответы и указания

Вар. 1. 1. Серединный перпендикуляр к отрезку с концами в данных точках. 2. 10 см. 3. Указание. Сначала построить хорду данной окружности, равную данному отрезку, а затем серединный перпендикуляр к этой хорде. 4. Указание. Разделить угол в 45° на 4 равные части.

Вар. 2. 1. Два луча, перпендикулярных к данной прямой, началом которых является данная точка. 2. 5 см. 3. Указание. Сначала построить окружность с центром в какой-нибудь точке на данной окружности и радиусом, равным данному отрезку. 4. Указание. Сначала построить угол в 135° , а затем построить его биссектрису.

Вар. 3. 1. Окружность с тем же центром, что и данная окружность; радиус этой окружности равен гипотенузе прямоугольного треугольника, один катет которого равен радиусу данной окружности, а другой имеет заданную длину. 2. 45° и 45° . 3. Указание. Рассмотреть окружность, диаметром которой служит отрезок, соединяющий данную точку с центром данной окружности. 4. Указание. Воспользоваться тем, что $12^\circ = 3 \cdot 34^\circ - 90^\circ$.

Вар. 4. 1. Окружность с тем же центром, что и данная окружность; радиус этой окружности равен катету прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна радиусу данной окружности, а длина второго катета равна половине заданной длины. 2. 30° и 60° . Указание. Провести медиану из вершины прямого угла. 3. Указание. Сначала построить точку пересечения серединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему данные точки, и биссектрисы данного угла. 4. Указание. Воспользоваться тем, что $1^\circ = 19 \cdot 19^\circ - 360^\circ$.

Уроки 62—67 Повторение. Решение задач

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: повторить основной теоретический материал всего курса геометрии 7 класса; закрепить навыки решения задач; подготовиться к итоговой контрольной работе.

На шести уроках, отводимых для повторения всего теоретического материала и решения задач, целесообразно сконцентрировать внимание учащихся на следующих основных вопросах курса:

Равнобедренный треугольник, признаки равенства треугольников	1 урок
Прямоугольные треугольники	1 урок
Соотношения между сторонами и углами треугольника	1 урок
Отрезки и углы, связанные с окружностью	2 урока
Задачи на построение	1 урок

За эти шесть уроков следует систематизировать полученные учащимися геометрические сведения, повторить доказательства отдельных наиболее важных теорем. Целесообразно не менее половины каждого урока отводить на решение задач. При этом можно использовать задачи из дидактических материалов. Отдельным ученикам можно предложить задачи повышенной трудности из учебника.

Урок 68 Контрольная работа № 4

Ответы и указания

Вар. 1. 1. 80° . **У к а з а н и е.** Треугольники EDB и FDB равны по первому признаку. 2. 60° . 3. 4 см. 4. **У к а з а н и е.** Сначала построить прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна данному радиусу окружности, а один из катетов равен половине данного отрезка. Затем, используя второй катет этого треугольника, построить прямоугольный треугольник по этому катету и противолежащему углу, равному половине данного угла.

Вар. 2. 1. 40° . **У к а з а н и е.** Треугольники AOB и COB равны по первому признаку. 2. 45° . 3. 60° . 4. **У к а з а н и е.** Сначала на данной прямой от данной точки отложить отрезок, равный данному отрезку, а затем построить серединный перпендикуляр к отложенному отрезку и окружность данного радиуса с центром в данной точке.

Вар. 3. 1. 9 см. Указание. $AX + DX = 7$ см и $BX + CX = 2$ см. 2. 10 см. Указание. Сначала доказать, что $\angle DBA = \angle DAB$. 3. Указание. Сначала доказать, что точки M , B и C лежат на окружности с диаметром AO . 4. Указание. Пусть M — середина искомой хорды, O — центр данной окружности. Тогда $\angle OMA = 90^\circ$ и длина отрезка AM равна половине длины данного отрезка.

Вар. 4. 1. 150° . Указание. $\angle AOX + \angle DOX = 120^\circ$ и $\angle BOX + \angle COX = 30^\circ$. 2. 5 см. Указание. Сначала доказать, что $\angle ABD = \angle BAD$. 3. 70° . Указание. Доказать, что $\angle BOC = 2\angle MON$ и $\angle BOC = 140^\circ$. 4. Указание. Сначала построить прямоугольный треугольник с катетом, равным половине данного отрезка, и гипотенузой, равной радиусу данной окружности. Затем построить окружность, радиус которой равен второму катету построенного треугольника, а центр совпадает с центром данной окружности, и провести к ней касательную через данную точку.

Почасовое тематическое планирование учебного материала

Содержание материала	Количество уроков	
	I вар.	II вар.
Глава 1. Начальные геометрические сведения	12	9
§ 1. Простейшие геометрические фигуры	2	1
1. Точка, прямая, отрезок	1	1
2. Луч и полуплоскость	1	
3. Угол		
§ 2. Сравнение отрезков и углов	2	1
4. Равенство геометрических фигур	1	1
5. Сравнение отрезков и углов		
Решение задач	1	—
§ 3. Измерение отрезков и углов	3	2
6. Измерение отрезков	1	1
7. Измерение углов	1	1
Решение задач	1	—
§ 4. Перпендикулярные прямые	3	3
8. Смежные и вертикальные углы	1	1
9. Перпендикулярные прямые. Перпендикуляр к прямой	2	2

Продолжение

Содержание материала	Количество уроков	
	I вар.	II вар.
Решение задач по теме «Начальные геометрические сведения»	1	1
Контрольная работа № 1	1	1
Глава 2. Треугольники	29	22
§ 5. Равнобедренный треугольник	4	3
10. Треугольник	1	1
11. Теорема об углах равнобедренного треугольника		
12. Признак равнобедренного треугольника		
13. Теорема о высоте равнобедренного треугольника	1	1
Решение задач	1	—
§ 6. Признаки равенства треугольников	6	5
14. Равные треугольники	1	1
15. Первый признак равенства треугольников		
Решение задач	1	—
16. Второй признак равенства треугольников	1	1
17. Третий признак равенства треугольников	1	1
Решение задач	2	2
§ 7. Прямоугольные треугольники	11	8
18. Прямоугольник	2	1
19. Виды треугольников	1	1
20. Прямоугольный треугольник с углом в 30°	2	1
21. Признаки равенства прямоугольных треугольников	1	1
22. Серединный перпендикуляр к отрезку	2	1
23. Свойство биссектрисы угла	1	1
Прямоугольный треугольник (повторение)	1	1
24. Проекция отрезка	1	1
§ 8. Соотношения между сторонами и углами треугольника	5	3
25. Неравенство треугольника	1	1

Продолжение

Содержание материала	Количество уроков	
	I вар.	II вар.
26. Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника	2	1
27. Сумма углов треугольника	2	1
Решение задач по теме «Треугольники»	2	2
Контрольная работа № 2	1	1
Глава 3. Окружность	20	14
§ 9. Отрезки, связанные с окружностью	10	7
28. Определение окружности	1	1
29. Взаимное расположение прямой и окружности	2	1
30. Касательная	2	1
31. Хорды и дуги	1	1
32. Угол между касательной и хордой	1	1
33. Вписанный угол	2	1
Решение задач	1	1
§ 10. Задачи на построение	7	4
34. Построения циркулем и линейкой	1	1
35. Построение треугольника по трём сторонам		
36. Построение угла, равного данному	1	1
37. Построение биссектрисы угла	1	
38. Построение серединного перпендикуляра	1	1
39. Построение прямой, перпендикулярной к данной	1	
40. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету	1	1
41. Построение касательной	1	
Решение задач по теме «Окружность»	2	2
Контрольная работа № 3	1	1
Повторение. Решение задач	6	4
Контрольная работа № 4	1	1
Всего	68	50

При решении многих задач (особенно задач главы 1) учащимся достаточно сделать правильный чертёж и по чертежу кратко записать решение. Ниже приведены решения некоторых основных и дополнительных задач.

Глава 1

7 а)

Дано: $OA = OB$, $OC < OD$ (рис. 11).

Сравнить: AC и BD .

Решение. Мысленно наложим отрезок AC на луч BD так, чтобы точка A совпала с точкой B . Так как по условию $OA = OB$, то отрезок AO совместится с отрезком BO , а так как $OC < OD$, то точка C окажется на отрезке OD между точками O и D . Таким образом, отрезок AC составит часть отрезка BD , т. е. $AC < BD$.

Ответ: $AC < BD$.

7 з)

Дано: $\angle AOE = \angle BOF$, OB — биссектриса угла AOC , OE — биссектриса угла DOF (рис. 12).

Сравнить: $\angle BOD$ и $\angle COE$.

Решение. Угол BOE является общей частью равных (по условию) углов AOE и BOF , поэтому $\angle AOB = \angle EOF$.

Так как лучи OB и OE — биссектрисы углов AOC и DOF , то $\angle AOB = \angle BOC$ и $\angle DOE = \angle EOF$. Из трёх равенств для углов следует, что $\angle BOC = \angle DOE$. Следовательно, $\angle BOD = \angle COE$.

Ответ: $\angle BOD = \angle COE$.

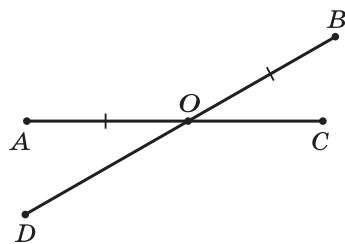


Рис. 11

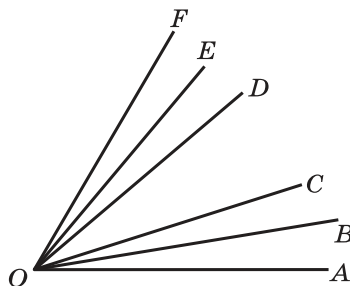


Рис. 12

9 б)

Дано: $AB = 2,4$ м, M — середина AB , точки P и Q лежат на прямой AB , $MP = 72$ см, $MQ = 0,25$ м, $PQ = 97$ см.

Найти: AP и BQ в дециметрах.

Решение. Так как $MP + MQ = 72$ см + 25 см = 97 см = PQ , то точка M лежит между P и Q . Возможны два случая.

I. Точка P лежит между A и M (рис. 13, а). Так как $AM = MB = 1,2$ м = 120 см, то $AP = AM - PM = 120$ см - 72 см = 48 см = $4,8$ дм, $BQ = BM - MQ = 120$ см - 25 см = 95 см = $9,5$ дм.

II. Точка P лежит между M и B (рис. 13, б). Тогда $AP = AM + MP = 120$ см + 72 см = 192 см = $19,2$ дм, $BQ = BM + MQ = 120$ см + 25 см = 145 см = $14,5$ дм.

Ответ: $AP = 4,8$ дм, $BQ = 9,5$ дм либо $AP = 19,2$ дм, $BQ = 14,5$ дм.

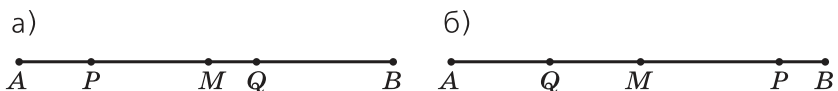


Рис. 13

9 д)

Дано: $AB = 32$ см, M — середина CD , N — середина DE , $MN = 7$ см, P — середина AC , Q — середина EB (рис. 14).

Найти: PQ .

Решение. Пусть $AP = x$, $QB = y$. Тогда $AC = 2x$, $EB = 2y$, $CE = AB - AC - EB = 32 - 2(x + y)$, $MN = MD + DN = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}CE = 16 - (x + y)$.

По условию $MN = 7$, т. е. $16 - (x + y) = 7$, откуда $x + y = 9$. $PQ = AB - AP - QB = 32 - x - y = 32 - (x + y) = 32 - 9 = 23$.

Ответ: $PQ = 23$ см.

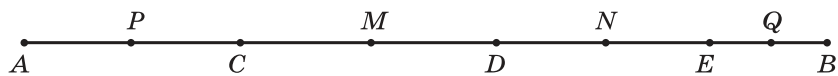


Рис. 14

11 в)

Дано: $\angle AOB = 150^\circ$, $2\angle AOP = 3\angle BOP$, $3\angle AOQ = 2\angle POQ$; OM — биссектриса угла AOB , ON — биссектриса угла POQ (рис. 15).

Найти: $\angle MON$.

Решение. 1) Пусть $\angle AOP = \alpha$. Тогда по условию $2\alpha = 3\angle BOP$, откуда $\angle BOP = \frac{2}{3}\alpha$. Так как $\angle AOP + \angle BOP = \angle AOB = 150^\circ$, то $\alpha + \frac{2}{3}\alpha = 150^\circ$, т. е. $\frac{5}{3}\alpha = 150^\circ$, поэтому $\alpha = 90^\circ$. Итак, $\angle AOP = 90^\circ$.

2) Пусть $\angle AOQ = \beta$. Тогда по условию $3\beta = 2\angle POQ$, откуда $\angle POQ = \frac{3}{2}\beta$. Так как $\angle AOQ + \angle POQ = \angle AOP = 90^\circ$, то $\beta + \frac{3}{2}\beta = 90^\circ$, т. е. $\frac{5}{2}\beta = 90^\circ$, поэтому $\beta = 36^\circ$. Итак, $\angle AOQ = 36^\circ$, $\angle POQ = 90^\circ - \angle AOQ = 54^\circ$.

3) Так как OM и ON — биссектрисы углов AOB и POQ , то $\angle AOM = 75^\circ$, $\angle QON = 27^\circ$.

4) $\angle MON = \angle AOM - \angle QON - \angle AOQ = 75^\circ - 27^\circ - 36^\circ = 12^\circ$.

Ответ: $\angle MON = 12^\circ$.

Замечание. При решении этой задачи (и также других задач) важно сделать правильный чертёж. Изначально неясно, как располагаются лучи OM и ON по отношению друг к другу: луч OM проходит внутри угла PON или луч ON проходит внутри угла POM . Правильное расположение (как на рисунке 15) определяется по ходу решения задачи: так как $\angle POM = \angle AOP - \angle AOM = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$, а $\angle PON = \frac{1}{2}\angle POQ = 27^\circ$, то луч OM проходит внутри угла PON .

13 г)

Дано: $\angle 1 = 30^\circ$, $\angle 2 = 50^\circ$ (рис. 16).

Найти: $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$.

Решение. 1) Углы 4 и 5 вертикальные по отношению соответственно к углам 1 и 2, поэтому $\angle 4 = \angle 1 = 30^\circ$, $\angle 5 = \angle 2 = 50^\circ$.

2) Угол 3 является смежным по отношению к углу, составленному из углов 1 и 2, поэтому $\angle 3 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = 180^\circ - (30^\circ + 50^\circ) = 100^\circ$.

3) Так как углы 3 и 6 вертикальные, то $\angle 6 = \angle 3 = 100^\circ$.

Ответ: $\angle 3 = 100^\circ$, $\angle 4 = 30^\circ$, $\angle 5 = 50^\circ$, $\angle 6 = 100^\circ$.

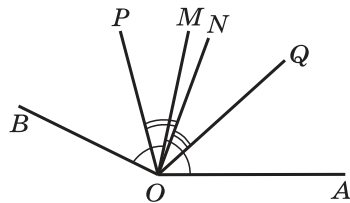


Рис. 15

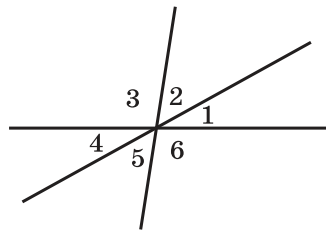


Рис. 16

15 б)

Дано: OM — биссектриса угла AOB , ON — биссектриса угла BOC , $\angle MON = 60^\circ$, $\angle BOC = 30^\circ$ (рис. 17).

Доказать: $OA \perp OB$.

Решение. Пусть $\angle AOB = \alpha$. Тогда $\angle BOM = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\alpha$, $\angle MON =$

$$= \angle NOB + \angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOC + \angle BOM = 15^\circ + \frac{1}{2}\alpha.$$

По условию $\angle MON = 60^\circ$, т. е. $15^\circ + \frac{1}{2}\alpha = 60^\circ$, откуда $\alpha = 90^\circ$. Итак, $\angle AOB = 90^\circ$, т. е. $OA \perp OB$, что и требовалось доказать.

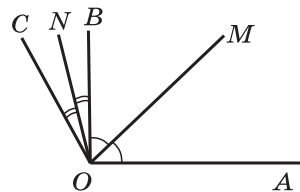


Рис. 17

22.

Какой угол образуют стрелки часов в 3 ч 10 мин?

Решение. Угол между двумя соседними лучами, например $\angle ZO3$ и также $\angle ZO4$, равен $\frac{1}{12}360^\circ = 30^\circ$ (рис. 18).

Через 10 минут после 3 часов минутная стрелка OA займёт такое положение, что $\angle AO3 = 30^\circ$. За эти же 10 минут часовая стрелка OB пройдёт $\frac{10}{60}$ (т. е. $\frac{1}{6}$) угла

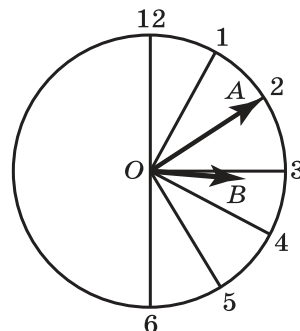


Рис. 18

между лучами $O3$ и $O4$, т. е. $\angle ZOB = \frac{1}{6}30^\circ = 5^\circ$. Итак,

$$\angle AOB = \angle AO3 + \angle ZOB = 30^\circ + 5^\circ = 35^\circ.$$

Ответ: 35° .

25.

Дано: $\angle hk + \angle hl = 180^\circ$.

Вопрос: могут ли углы hk и hl быть: а) смежными; б) несмежными?

Решение. Если лучи l и k лежат на одной прямой и не совпадают (рис. 19, а), то данное равенство выполняется, а углы hk и hl являются смежными.

Если лучи l и k не лежат на одной прямой, то данное равенство также может выполняться: на рисунке 19, б

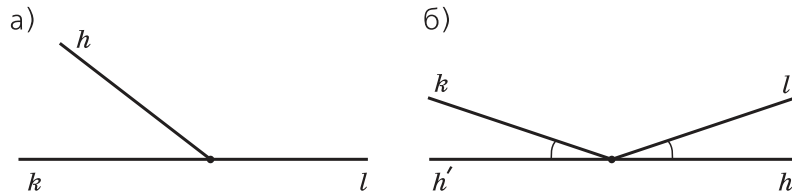


Рис. 19

углы hl и $h'k$ равны, поэтому $\angle hl + \angle hk = \angle h'k + \angle hk = 180^\circ$. Но при этом углы hk и hl не являются смежными.

Ответ: а) да; б) да.

Глава 2

31 б)

Дано: $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 20).

Доказать: $\triangle CDE$ — равнобедренный.

Решение. $\angle BCA = \angle 1$ (по теореме об углах равнобедренного треугольника).

$\angle BCA = \angle ECD$ (вертикальные углы равны). Следовательно, $\angle ECD = \angle 1$, а так как $\angle 1 = \angle 2$ (по условию), то $\angle ECD = \angle 2$, т. е. треугольник CDE равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), что и требовалось доказать.

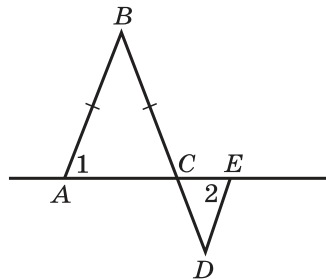


Рис. 20

33 г)

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = BD$, $BH \perp AC$, $BE \perp CD$ (рис. 21).

Доказать: $BH \perp BE$.

Решение. Высота BH равнобедренного треугольника ABC является биссектрисой, поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично в треугольнике BCD углы 3 и 4 равны.

Так как $2(\angle 2 + \angle 3) = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, то $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$, т. е. $BH \perp BE$, что и требовалось доказать.

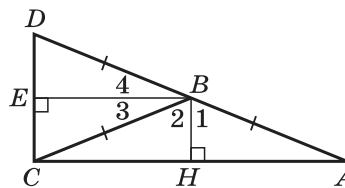


Рис. 21

35 г)

Дано: $\angle AQC = \angle BPC$, $AP = BQ$ (рис. 22).

Доказать: $\angle ABC = \angle BAC$.

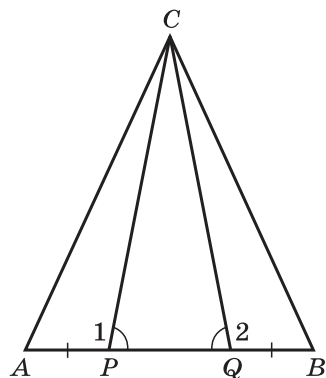


Рис. 22

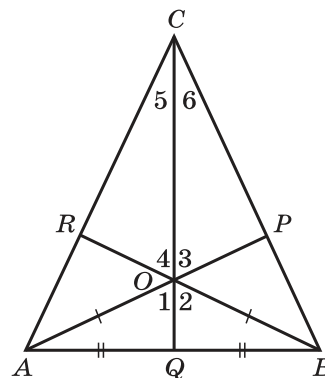


Рис. 23

Решение. $CP = CQ$ (по признаку равнобедренного треугольника).

$\angle 1 = \angle 2$ (так как эти углы смежные с равными углами BPC и AQC).

$\triangle APC = \triangle BQC$ по двум сторонам и углу между ними ($AP = BQ$ по условию, $CP = CQ$, $\angle 1 = \angle 2$).

Следовательно, $AC = BC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный, и поэтому $\angle ABC = \angle BAC$, что и требовалось доказать.

37 д)

Дано: $OA = OB$, $AQ = BQ$ (рис. 23).

Доказать: $OP = OR$.

Решение. 1) В равнобедренном треугольнике AOB медиана OQ является биссектрисой и высотой, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle AQO = \angle BQO = 90^\circ$.

2) $\angle 3 = \angle 1$ и $\angle 4 = \angle 2$ (вертикальные углы равны), поэтому $\angle 3 = \angle 4$.

3) $\triangle AQC = \triangle BQC$ по двум сторонам ($AQ = BQ$, CQ — общая сторона) и углу между ними ($\angle AQC = \angle BQC$), поэтому $\angle 5 = \angle 6$.

4) $\triangle OPC = \triangle ORC$ по стороне (OC — общая сторона) и прилежащим к ней углам ($\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 6 = \angle 5$). Следовательно, $OP = OR$, что и требовалось доказать.

Замечание. Возможно и другое обоснование равенства $\angle 5 = \angle 6$, вместо пункта 3):

3) $\triangle AOC = \triangle BOC$ по двум сторонам ($AO = BO$, CO — общая сторона) и углу между ними ($\angle AOC = \angle BOC$, так как эти углы являются смежными с равными углами 1 и 2), поэтому $\angle 5 = \angle 6$.

39 г)

Дано: $AP = BR$, $AR = BP$
(рис. 24).

Доказать: $\angle PAR = \angle RBP$.

Решение. $\triangle ABR = \triangle BAP$ по трём сторонам (AB — общая сторона, $BR = AP$ и $AR = BP$ по условию), следовательно, $\angle RAB = \angle PBA$ и $\angle 1 = \angle 2$.

$$\begin{aligned}\angle RAP &= \angle RAB - \angle 1, \\ \angle PBR &= \angle PBA - \angle 2.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\angle PAR = \angle RBP$, что и требовалось доказать.

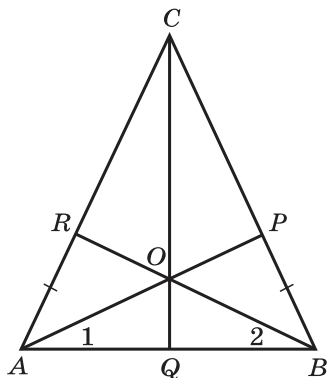


Рис. 24

41 б)

Дано: прямоугольник $ABCD$,
 O — точка пересечения диагоналей (рис. 25).

Доказать: $OA = OB = OC = OD$.

Решение. $\triangle BAD = \triangle ABC$ по двум сторонам (AB — общая сторона, $AD = BC$ как противоположные стороны прямоугольника) и углу между ними ($\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$), поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что треугольник AOB равнобедренный, т. е. $OA = OB$.

Аналогично доказывается, что $OB = OC = OD$.

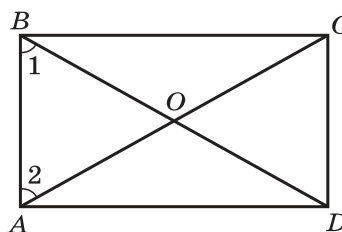


Рис. 25

41 ж)

Дано: AA_1 и BB_1 — высоты
треугольника ABC , $\angle CAA_1 = \angle ABB_1$ (рис. 26).

Доказать: $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Решение. В прямоугольном треугольнике сумма двух острых углов равна 90° , поэтому $\angle 1 + \angle C = 90^\circ$ и $\angle 2 + \angle B = 90^\circ$. Так как $\angle 1 = \angle 2$ (по условию), то $\angle C = \angle B$.

Итак, в треугольнике ABC углы C и B равны. Следовательно, $\triangle ABC$ равнобедренный, что и требовалось доказать.

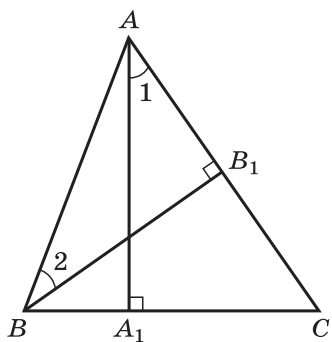


Рис. 26

43 д)

Дано: $\triangle ABC$, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $BM = MC$ (рис. 27, а).

Доказать: $AM = AB$.

Решение. 1) Проведём из точки M перпендикуляры MH и MK к сторонам AB и AC (рис. 27, б). В четырёхугольнике $AHMK$ углы A , H и K прямые, поэтому $AHMK$ — прямоугольник, и, следовательно, $AK = HM$ и $AH = KM$.

2) Так как треугольники ABC и KMC прямоугольные, то $\angle C + \angle 2 = 90^\circ$ и $\angle C + \angle 1 = 90^\circ$. Следовательно, $\angle 2 = \angle 1 = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, $\angle HMB = 90^\circ - \angle 2 = 30^\circ$.

3) $\triangle HBM = \triangle KMC$ по стороне ($BM = MC$ по условию) и прилежащим к ней углам ($\angle 2 = \angle 1$ и $\angle HMB = \angle C = 30^\circ$). Поэтому $HM = KC$ и $HB = KM$.

4) Так как $AK = HM$ и $HM = KC$, то $AK = KC$, т. е. в треугольнике AMC высота MK является медианой. Поэтому $\triangle AMC$ равнобедренный и $AM = MC = BM$.

5) В треугольнике HBM угол H прямой и $\angle HMB = 30^\circ$, поэтому $HB = \frac{1}{2} BM = \frac{1}{2} AM$, а поскольку $HB = KM = AH$, то $AB = AH + HB = 2HB = AM$. Итак, $AM = AB$, что и требовалось доказать.

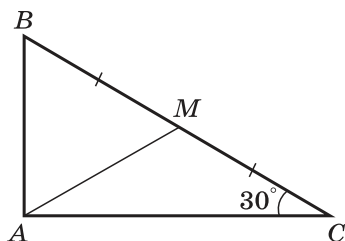
Замечание. Возможно и другое продолжение решения после пункта 2).

3) $KM = \frac{1}{2} MC$, $HB = \frac{1}{2} BM$ (катет, лежащий против угла в 30°). Так как $BM = MC$, то $KM = HB$, а поскольку $AH = KM$, то $AH = HB$.

4) В треугольнике AMB высота MH является медианой, поэтому этот треугольник равнобедренный (задача 35 б)): $AM = BM$.

5) $AB = AH + HB = 2HB = 2 \cdot \frac{1}{2} BM = BM = AM$. Итак, $AM = AB$, что и требовалось доказать.

а)



б)

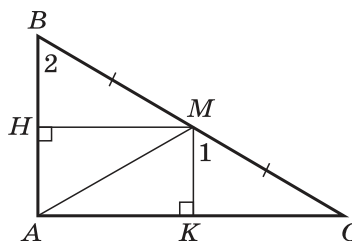


Рис. 27

45 д)

Дано: BM — биссектриса и медиана треугольника ABC (рис. 28, а).

Доказать: $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Решение. 1-й способ (соответствующий указанию, данному в учебнике). Проведём из точек A и C перпендикуляры AH и CK к прямой BM (рис. 28, б). Тогда $AH = CK$ (задача 45 г)).

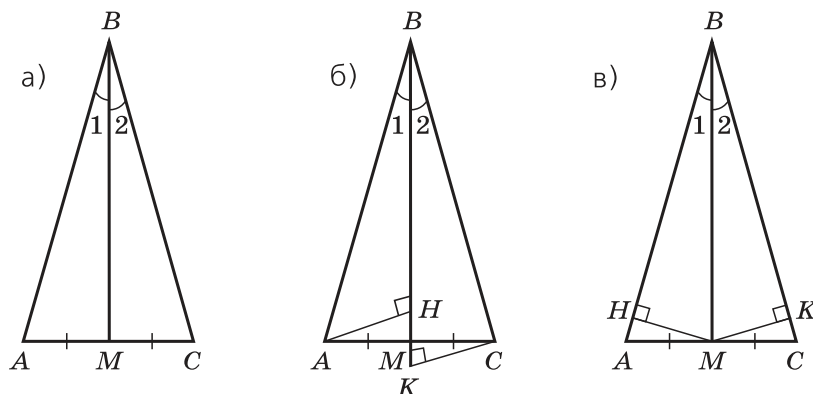


Рис. 28

Прямоугольные треугольники AHB и CKB равны по катету ($AH = CK$) и противолежащему углу ($\angle 1 = \angle 2$), поэтому $AB = BC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный, что и требовалось доказать.

Замечание. После того как мы доказали, что треугольник ABC равнобедренный и, следовательно, BM — высота, т. е. $BM \perp AC$, можно сделать вывод: на самом деле точки H и K совпадают с точкой M .

2-й способ. Проведём из точки M перпендикуляры MH и MK к прямым AB и BC (рис. 28, в). Прямоугольные треугольники BHM и BKM равны по гипотенузе (BM — общая гипотенуза) и острому углу ($\angle 1 = \angle 2$), поэтому $MH = MK$.

Прямоугольные треугольники AHM и CKM равны по гипотенузе ($AM = CM$) и катету ($MH = MK$). Отсюда следует, что $\angle A = \angle C$, а значит, треугольник ABC равнобедренный, что и требовалось доказать.

47 б)

Дано: $\triangle ABC$, l — серединный перпендикуляр к AB , m — серединный перпендикуляр к AC . Точка M пересечения l и m лежит на стороне BC (рис. 29).

Доказать: $\angle A = \angle B + \angle C$.
Решение. Так как $M \in l$, то $MA = MB$, т. е. треугольник AMB равнобедренный, и поэтому $\angle 1 = \angle B$.

Аналогично треугольник AMC равнобедренный, и $\angle 2 = \angle C$. Так как $\angle A = \angle 1 + \angle 2$, то $\angle A = \angle B + \angle C$, что и требовалось доказать.

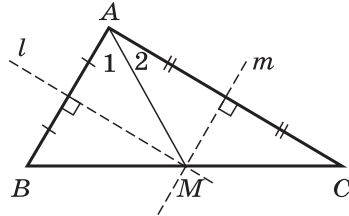


Рис. 29

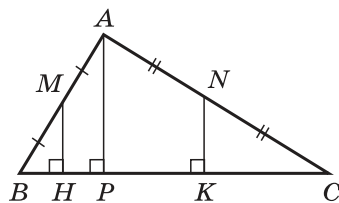
47 г)

Дано: $\triangle ABC$, $AM = MB$, $AN = NC$, H и K — проекции точек M и N на прямую BC (рис. 30, а, б).

Доказать: $BC = 2HK$.

Решение. Пусть P — проекция точки A на BC . Возможны три случая: 1) углы B и C острые, в этом случае точка P лежит между H и K (рис. 30, а); 2) один из углов B или C тупой, в этом случае точка P лежит вне отрезка HK (рис. 30, б); 3) один из углов B и C прямой (рассмотрите этот случай самостоятельно).

а)



б)

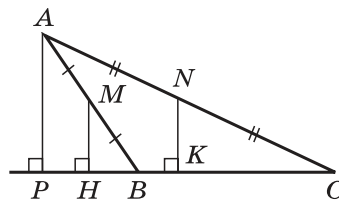


Рис. 30

Так как проекции равных отрезков равны, то $BH = HP$ и $PK = KC$, откуда $BP = 2HP$ и $PC = 2PK$.

В первом случае $BC = BP + PC = 2HP + 2PK = 2(HP + PK) = 2HK$; во втором случае $BC = PC - BP = 2PK - 2PH = 2(PK - PH) = 2HK$.

Таким образом, в любом случае $BC = 2HK$, что и требовалось доказать.

49 д)

Дано: $\triangle ABC$, серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AC (рис. 31, а).

Доказать: $AC > BC$.

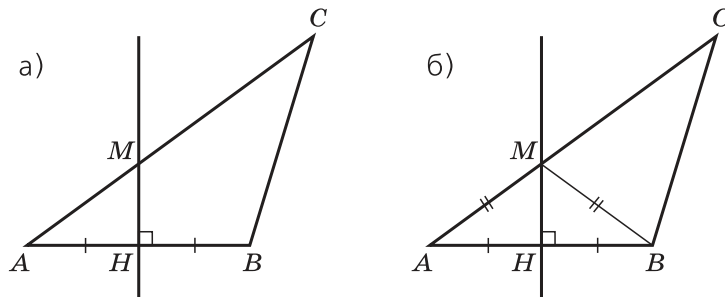


Рис. 31

Решение. Проведём отрезок MB (рис. 31, б). Так как точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB , то она равноудалена от концов этого отрезка, т. е. $AM = BM$.

В треугольнике BCM в силу неравенства треугольника $BC < BM + MC$, а так как $BM = AM$, то $BC < AM + MC = AC$, т. е. $AC > BC$, что и требовалось доказать.

49 е)

Доказать: каждая сторона треугольника меньше половины его периметра.

Решение. Докажем, например, что сторона AB треугольника ABC меньше $\frac{1}{2}(AB + BC + CA)$. В силу неравенства треугольника $AB < BC + CA$. Прибавив к обеим частям неравенства AB и разделив обе части на 2, получим $AB < \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$, что и требовалось доказать.

49 ж)

Дано: $\triangle ABC$, AA_1 и BB_1 — медианы треугольника (рис. 32).

Доказать:

$$AA_1 + BB_1 > \frac{1}{2}(AC + BC).$$

Решение. Согласно неравенству треугольника, $AB_1 < AO + OB_1$ и $BA_1 < BO + OA_1$. Сложим эти неравенства. Учитывая, что

$$AB_1 = \frac{1}{2}AC, \quad BA_1 = \frac{1}{2}BC,$$

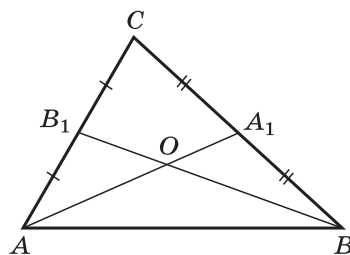


Рис. 32

получим:

$$\frac{1}{2}(AC + BC) < (AO + OA_1) + (BO + OB_1) = AA_1 + BB_1.$$

Итак, $AA_1 + BB_1 > \frac{1}{2}(AC + BC)$, что и требовалось доказать.

50 е)

Доказать: сумма медиан треугольника меньше его периметра.

Решение. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — медианы треугольника ABC . Тогда $AA_1 < \frac{1}{2}(AB + AC)$ (задача 49 г)) и также $BB_1 < \frac{1}{2}(BC + BA)$, $CC_1 < \frac{1}{2}(CA + CB)$. Сложив эти три неравенства, получим $AA_1 + BB_1 + CC_1 < AB + BC + CA$, что и требовалось доказать.

50 ж)

Дано: точки A и C лежат по разные стороны от прямой BD , а точки B и D — по разные стороны от прямой AC (рис. 33).

Доказать: $2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA$.

Решение. Отрезки AC и BD пересекаются в некоторой точке O (рис. 33). Согласно неравенству треугольника,

$$\begin{aligned} OA + OB &> AB, \quad OB + OC > BC, \\ OC + OD &> CD, \quad OD + OA > AD. \end{aligned}$$

Складывая эти четыре неравенства и учитывая, что $OA + OC = AC$, $OB + OD = BD$, получаем $2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA$, что и требовалось доказать.

51 в)

Дано: четырёхугольник $ABCD$, $\angle BAC = \angle CAD$, $AB = AD = 7$ см, $AC = 10$ см (рис. 34).

Сравнить: $\angle ABC$ и $\angle ACD$.

Решение. $\triangle ABC = \triangle ADC$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

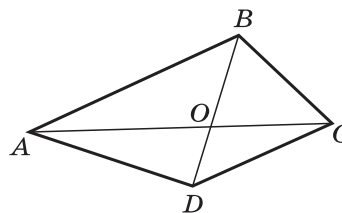


Рис. 33

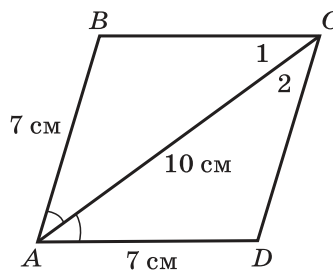


Рис. 34

В треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB , следовательно, $\angle ABC > \angle 1 = \angle 2 = \angle ACD$. Итак, $\angle ABC > \angle ACD$.

Ответ: $\angle ABC > \angle ACD$.

51 г)

Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный, точка D лежит на основании BC (рис. 35, а).

Доказать: $AD \leq AB$.

Решение. Если точка D совпадает с B или C , то $AD = AB$. Пусть точка D лежит между B и C . Проведём высоту AM треугольника ABC (рис. 35, б).

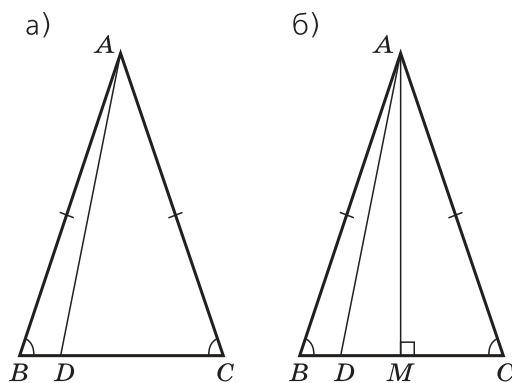


Рис. 35

Если точка D совпадает с точкой M , то $AD < AB$, так как в этом случае AD — катет, а AB — гипотенуза прямоугольного треугольника ADB .

Пусть точка D отлична от M и лежит, например, между B и M . В прямоугольном треугольнике AMD угол ADM острый, поэтому смежный с ним угол ADB тупой. Следовательно, $\angle ABD < \angle ADB$, и поэтому $AD < AB$ (против большего угла в треугольнике ADB лежит бо́льшая сторона).

Таким образом, в любом случае $AD \leq AB$, что и требовалось доказать.

52 г)

Дано: точка D лежит на стороне BC треугольника ABC , в котором $AC \geq AB$ (рис. 36, а).

Доказать: $AD \leq AC$.

Решение. Проведём высоту AH треугольника ABC (рис. 36, б). Если точка H совпадает с точкой B , то точка D лежит на отрезке CH . В противном случае точка D лежит

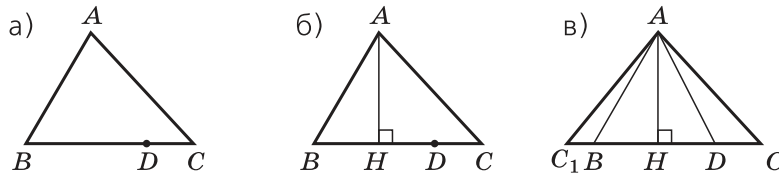


Рис. 36

либо на отрезке CH , либо на отрезке BH , либо на том и другом, если она совпадает с точкой H .

Пусть, например, точка D лежит на отрезке CH (рис. 36, б). На продолжении луча HC отметим точку C_1 так, что $HC_1 = HC$ (рис. 36, в). Тогда треугольник CAC_1 равнобедренный, так как его медиана AH является высотой (задача 35 б)). Согласно доказанному в задаче 51 г), справедливо неравенство $AD \leq AC$.

Если же точка D лежит на отрезке BH , то аналогичным образом доказывается, что $AD \leq AB$, а поскольку $AB \leq AC$, то $AD \leq AC$. Таким образом, в любом случае $AD \leq AC$, что и требовалось доказать.

53 з)

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, AD — биссектриса треугольника (рис. 37).

Доказать: $CD < AC < AD < AB$.

Решение. 1) Угол A острый,

поэтому $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle A < 45^\circ$, а

$\angle ADC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A > 45^\circ$. Таким образом, $\angle CAD < \angle ADC$,

поэтому $CD < AC$.

2) $AC < AD$, так как катет меньше гипотенузы.

3) В треугольнике ADB угол ADB тупой, так как он является смежным с острым углом ADC . Следовательно, $\angle ABD < \angle ADB$, поэтому $AD < AB$.

Итак, $CD < AC < AD < AB$, что и требовалось доказать.

58*.

Доказать: каждый угол имеет биссектрису.

Решение. Отложим на сторонах данного угла A равные отрезки AB и AC и проведём перпендикуляр AH к прямой BC

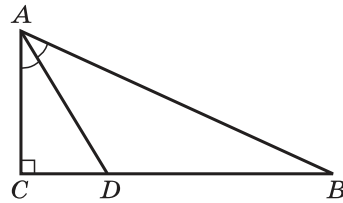


Рис. 37

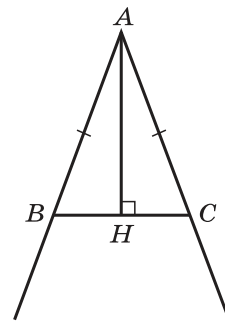


Рис. 38

(рис. 38). Высота AH равнобедренного треугольника ABC является его биссектрисой. Таким образом, луч AH — биссектриса данного угла A .

59*.

Доказать: каждый отрезок имеет середину.

Решение. Пусть AB — данный отрезок. Проведём лучи AP и BQ , перпендикулярные к прямой AB и расположенные по одну сторону от неё (рис. 39, а). Точка P лежит во внутренней области прямого угла ABQ , поэтому луч BP проходит внутри этого угла, и, следовательно, угол ABP острый. Отложим от луча AB угол BAC , равный углу ABP , так, чтобы луч AC лежал по ту же сторону от прямой AB , что и точки P и Q (рис. 39, б). Так как угол BAC острый, то луч AC проходит внутри прямого угла BAQ и поэтому пересекает отрезок BQ с концами на сторонах угла BAQ в некоторой точке M .

В треугольнике AMB угол MAB равен углу MBA , и, следовательно, этот треугольник равнобедренный. Проведём его высоту MH (рис. 39, в). Она является также медианой треугольника, т. е. точка H — середина отрезка AB .

Итак, мы доказали, что произвольный отрезок AB имеет середину.

Замечание. Посмотрим ещё раз, какие утверждения мы использовали при решении задачи: 1) если точка P лежит во внутренней области угла ABQ , то луч BP проходит внутри этого угла (при всей очевидности этого утверждения оно требует обоснования, что будет сделано при рассмотрении аксиом в 8 классе); 2) от луча AB в данную полуплоскость с границей AB можно отложить угол BAC , равный известному неразвёрнутому углу ABP (это также наглядно очевидное утверждение является одной из аксиом, о которой пойдёт речь в 8 классе); 3) теорему о признаке равнобедренного треугольника (эта теорема доказана в § 5, поэтому данная задача входит в число дополнительных задач к этому параграфу). Если же использовать ещё и теорему о первом признаке равенства треугольников, то можно дать более

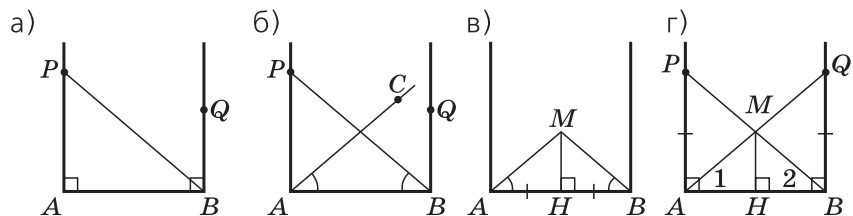


Рис. 39

простое решение задачи: точки P и Q нужно выбрать так, что $AP = BQ$ (рис. 39, з), после чего доказать равенство треугольников PAB и QBA , откуда следует, что $\angle 1 = \angle 2$, и далее доказательство завершается, как и в первом случае.

73.

Доказать: основание одной из высот тупоугольного треугольника лежит на стороне треугольника, а основания двух других высот — на продолжениях сторон.

Решение. 1) Докажем сначала, что если основание высоты лежит на продолжении стороны, то один из углов, прилежащих к этой стороне, тупой. Пусть основание высоты AH треугольника ABC лежит на продолжении стороны BC , например, за точку B (рис. 40, а). Тогда в прямоугольном треугольнике AHB угол ABH острый, поэтому смежный с ним угол ABC треугольника ABC тупой.

Отсюда следует, что если в треугольнике ABC угол A тупой, то основание высоты AH лежит на стороне BC (рис. 40, б). В самом деле, если допустить, что это не так, то, согласно доказанному, получим, что один из углов B и C тупой, чего не может быть, так как в треугольнике не может быть двух тупых углов.

2) Рассмотрим теперь высоту BK в треугольнике ABC с тупым углом A . Если допустить, что точка K лежит на стороне AC (рис. 40, в), то получим прямоугольный треугольник ABK с тупым углом A , чего не может быть. Следовательно, основание высоты BK (точка K) лежит на продолжении стороны AC . Таким же образом доказывается, что основание высоты, проведенной из вершины C , лежит на продолжении стороны AB .

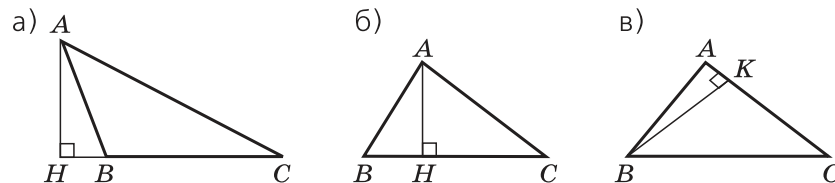


Рис. 40

74.

Дано: AH и AD — высота и биссектриса треугольника ABC (рис. 41, а).

Доказать: $\angle HAD = \frac{1}{2}|\angle B - \angle C|$.

Решение. Если $\angle B = \angle C$, то треугольник ABC равнобедренный. В этом случае высота AH является биссектрисой,

и, следовательно, совпадающие лучи AH и AD не образуют угла. Поэтому будем считать, что $\angle B \neq \angle C$. Пусть, например, $\angle B > \angle C$. Возможны три случая.

I. Угол B острый (рис. 41, а). В этом случае точка H лежит на стороне BC . В самом деле, если предположить, что точка H лежит на продолжении стороны BC , например, за точку B (рис. 41, б), то получится треугольник AHB с прямым углом H и тупым углом ABH , чего не может быть.

Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° , то $\angle BAH = 90^\circ - \angle B$, $\angle CAH = 90^\circ - \angle C$, а поскольку $\angle B > \angle C$, то $\angle BAH < \angle CAH$. Отсюда следует, что биссектриса AD угла BAC проходит внутри угла HAC (рис. 41, а). Поэтому $\angle BAD = \angle BAH + \angle HAD = 90^\circ - \angle B + \angle HAD$, $\angle CAD = \angle CAH - \angle HAD = 90^\circ - \angle C - \angle HAD$, а так как $\angle BAD = \angle CAD$, то $90^\circ - \angle B + \angle HAD = 90^\circ - \angle C - \angle HAD$.

Отсюда следует, что $\angle HAD = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$.

II. Угол B прямой (рис. 41, в). В этом случае точка H совпадает с точкой B и $\angle HAD = \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}(90^\circ - \angle C) = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$.

III. Угол B тупой. В этом случае, согласно утверждению задачи 73, точка H лежит на продолжении стороны BC за точку B (рис. 41, г). Поэтому $\angle BAD = \angle HAD - \angle HAB = \angle HAD - (90^\circ - \angle ABH) = \angle HAD - \angle(90^\circ - (180^\circ - \angle B)) = \angle HAD + 90^\circ - \angle B$, $\angle CAD = \angle HAC - \angle HAD = (90^\circ - \angle C) - \angle HAD$.

Приравнивая полученные выражения для углов BAD и CAD , приходим к равенству $\angle HAD + 90^\circ - \angle B = 90^\circ - \angle C - \angle HAD$, откуда следует, что $\angle HAD = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$.

Итак, если $\angle B > \angle C$, то в каждом из трёх случаев получилось равенство

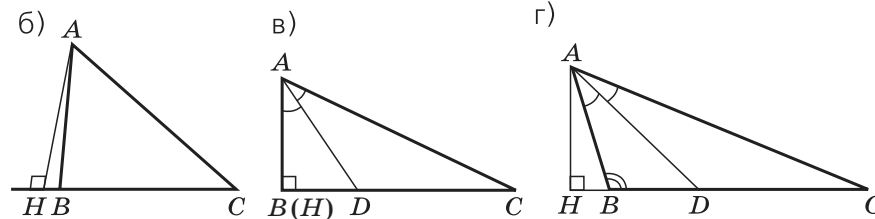
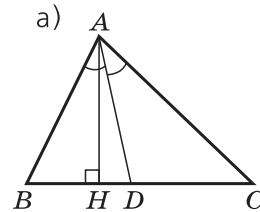


Рис. 41

$\angle HAD = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$. Аналогично, если $\angle C > \angle B$, то получится равенство $\angle HAD = \frac{1}{2}(\angle C - \angle B)$. Оба выражения для угла HAD можно объединить такой записью: $\angle HAD = \frac{1}{2}|\angle B - \angle C|$.

83*.

Дано: квадрат $ABCD$, $AN = 3NC$, $AM = MB$ (рис. 42).

Доказать: $\angle DNM = 90^\circ$.

Решение. 1) Пусть K и H — проекции точки N на стороны AB и AD и пусть $AB = AD = 4a$. Так как $AN = 3NC$, то проекции AH и HD отрезков AN и NC на сторону AD угла CAD связаны равенством $AH = 3HD$, откуда $HD = a$, $AH = 3a$. Аналогично получаем: $KB = a$, $AK = 3a$, а так как $MB = \frac{1}{2}AB = 2a$, то $KM = a$.

2) В четырёхугольнике $AKNH$ три угла прямые и $AK = AH$, поэтому $AKNH$ — квадрат.

3) Прямоугольные треугольники NHD и NKM равны по двум катетам ($NH = NK = 3a$, $HD = KM = a$), поэтому $\angle DNH = \angle MNK$.

4) $\angle DNM = \angle DNH + \angle HNM = \angle MNK + \angle HNM = \angle HNK = 90^\circ$. Итак, $\angle DNM = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

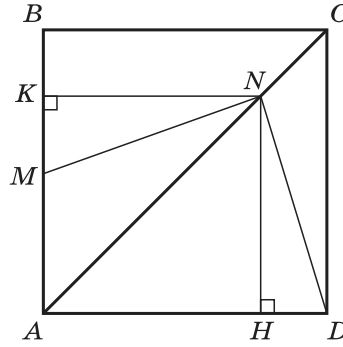


Рис. 42

90.

Дано: $\triangle ABC$ — равносторонний, точка D лежит во внутренней области треугольника ABC (рис. 43).

Доказать: $DA < DB + DC$.

Решение. Продолжим отрезок AD до пересечения со стороной BC в точке M . Так как $AM < AB$ (задача 51 г)), а $AB = BC$, то $AM < BC$, и, следовательно, $DA < BC$.

В треугольнике BDC , согласно неравенству треугольника, $BC < DB + DC$. Таким образом, $DA < BC < DB + DC$, и, значит, $DA < DB + DC$, что и требовалось доказать.

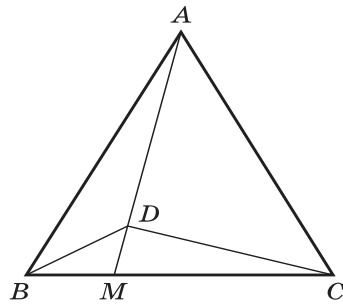


Рис. 43

92.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $BD = BC$, $AE = AC$ (рис. 44).

Найти: $\angle DCE$.

Решение. 1) В равнобедренном треугольнике BCD угол 1 равен $\frac{1}{2}(180^\circ - \angle B)$.

2) В равнобедренном треугольнике ACE угол 2 равен $\frac{1}{2}(180^\circ - \angle A)$.

3) В треугольнике CDE сумма углов равна 180° , поэтому

$$\begin{aligned}\angle DCE &= 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B).\end{aligned}$$

Но сумма острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC равна 90° , и, следовательно, $\angle DCE = 45^\circ$.

Ответ: $\angle DCE = 45^\circ$.

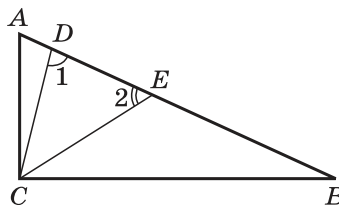


Рис. 44

94.

Дано: $AB = AC$, $AP = PQ = QR = RB = BC$ (рис. 45).

Найти: $\angle A$.

Доказать: $BQ = BR$.

Решение. 1) Пусть $\angle A = \alpha$. Тогда $\angle AQP = \alpha$, $\angle RPQ = 2\alpha$ (внешний угол треугольника APQ), $\angle PRQ = 2\alpha$, $\angle PQR = 180^\circ - 4\alpha$, $\angle RQB = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 4\alpha) = 3\alpha$, $\angle RBQ = 3\alpha$, $\angle QRB = 180^\circ - 6\alpha$, $\angle CRB = 180^\circ - 2\alpha - (180^\circ - 6\alpha) = 4\alpha$, $\angle RCB = 4\alpha$.

2) С другой стороны, треугольник ABC равнобедренный ($AB = AC$ по условию), поэтому $\angle ACB = \angle ABC$ и $\angle RCB = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$.

Итак, $\angle RCB = 4\alpha = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$, откуда $\alpha = 20^\circ$. Таким образом, $\angle A = 20^\circ$.

3) В треугольнике BRQ находим углы: $\angle RQB = \angle RBQ = 3\alpha = 60^\circ$, $\angle QRB = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, т. е. треугольник BRQ равносторонний. Поэтому $BQ = BR$, что и требовалось доказать.

Ответ: $\angle A = 20^\circ$.

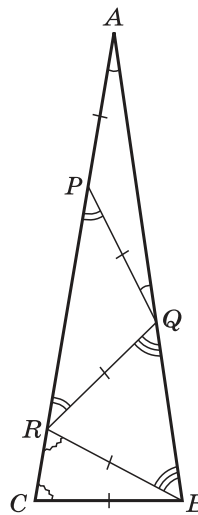


Рис. 45

97*.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 35^\circ$, $\angle PCB = 20^\circ$, $\angle BAQ = 10^\circ$ (рис. 46).

Найти: $\angle CPQ$.

Решение. 1) $\angle CAB = 90^\circ - \angle B = 55^\circ$, $\angle CAQ = 55^\circ - 10^\circ = 45^\circ$, $\angle AQC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Следовательно, треугольник ACQ равнобедренный: $AC = CQ$.

2) В треугольнике ACP находим: $\angle ACP = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$, $\angle APC = 180^\circ - (\angle CAP + \angle ACP) = 180^\circ - (70^\circ + 55^\circ) = 55^\circ$.

Таким образом, $\angle CAP = \angle APC = 55^\circ$, поэтому $AC = CP$.

3) Так как $AC = CQ$ и $AC = CP$, то $CQ = CP$, т. е. треугольник PCQ равнобедренный. Поэтому $\angle CPQ = \frac{1}{2}(180^\circ - 20^\circ) = 80^\circ$.

Ответ: $\angle CPQ = 80^\circ$.

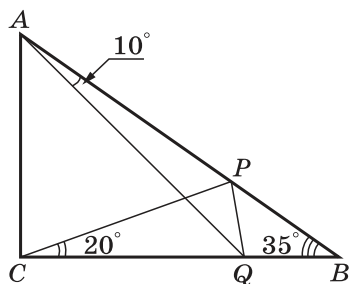


Рис. 46

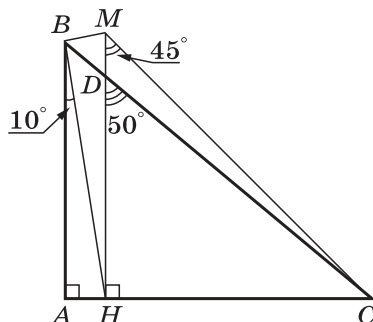


Рис. 47

98*.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, $MN \perp AC$, $\angle CDH = 50^\circ$, $\angle CMN = 45^\circ$, $\angle ABH = 10^\circ$ (рис. 47).

Найти: $\angle BMH$.

Решение. 1) Треугольник MNC прямоугольный, поэтому $\angle MCH = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, и, следовательно, треугольник MNC равнобедренный: $CH = MN$.

2) Треугольник DNC также прямоугольный, поэтому $\angle DCH = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. Отсюда следует, что $\angle ABC = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ и $\angle HBC = \angle ABC - \angle ABH = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$. Таким образом, $\angle HBC = \angle DCH = 40^\circ$, и, следовательно, $CH = BH$.

3) Так как $CH = MN$ и $CH = BH$, то $MN = BH$, т. е. треугольник BHM равнобедренный; $\angle BHM = 90^\circ - \angle BHA = 90^\circ - (90^\circ - \angle ABH) = \angle ABH = 10^\circ$, поэтому $\angle BMH = \frac{1}{2}(180^\circ - 10^\circ) = 85^\circ$.

Ответ: $\angle BMH = 85^\circ$.

Глава 3

101 ж)

Дано: $\cup AB < 180^\circ$, M — точка на дуге AB ; CA , CB и PQ — касательные к окружности с центром O (рис. 48, а).

Доказать: периметр треугольника CPQ и величина угла POQ не зависят от выбора точки M на дуге AB .

Решение. 1) $PA = PM$ и $QM = QB$ (отрезки касательных, проведённые из одной точки, равны), поэтому периметр P_{CPQ} равен

$$\begin{aligned} CP + PQ + CQ &= (CP + PM) + (CQ + QM) = \\ &= (CP + PA) + (CQ + QB) = CA + CB. \end{aligned}$$

Итак, периметр P_{CPQ} равен $CA + CB$, и, следовательно, P_{CPQ} имеет одно и то же значение при любом выборе точки M на дуге AB , т. е. P_{CPQ} не зависит от выбора точки M на дуге AB .

2) На рисунке 48, б $OA \perp AC$, $OB \perp BC$, $OM \perp PQ$ (радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен к касательной).

$\triangle AOP = \triangle MOP$ по гипотенузе (OP — общая гипотенуза) и катету ($AP = MP$), следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично доказывается, что $\angle 3 = \angle 4$. Поэтому $\angle POQ = \angle 2 + \angle 3 = \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4) = \frac{1}{2}\angle AOB$, т. е. величина угла POQ не зависит от выбора точки M на дуге AB .

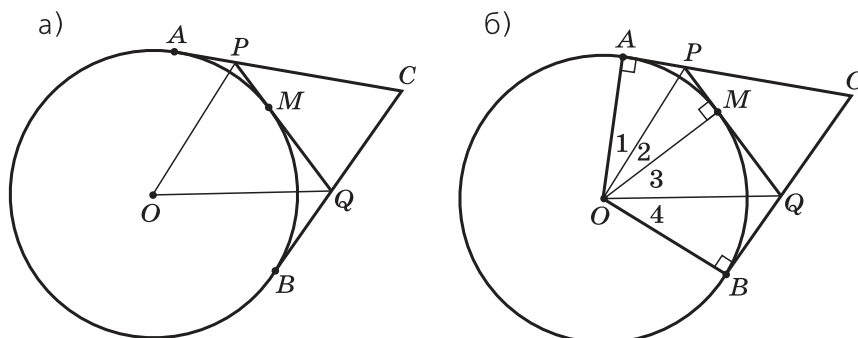


Рис. 48

105 ж)

Дано: прямая a — касательная к окружности с центром O , A — точка касания, $OD \perp OB$ (рис. 49).

Доказать: $AD = CD$.

Решение. Пусть $\sphericalangle AB = \alpha$, тогда $\sphericalangle AE = 180^\circ - \alpha$, $\sphericalangle 1 = \frac{1}{2}\alpha$ (угол между касательной и хордой), $\sphericalangle 4 = \frac{1}{2}(\sphericalangle AE) = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ (вписанный угол).

Так как треугольник BOC прямоугольный, то $\sphericalangle 3 = 90^\circ - \sphericalangle 4 = 90^\circ -$

$\left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{2}\alpha$; $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = \frac{1}{2}\alpha$ (вертикальные углы).

Итак, $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, поэтому $AD = CD$, что и требовалось доказать.

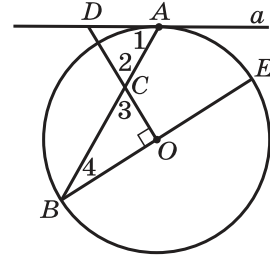


Рис. 49

105 з)

Доказать: $\sphericalangle AMC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ALC + \sphericalangle BKD)$ (рис. 50, а).

Решение. Угол AMC — внешний угол треугольника MBC (рис. 50, б), поэтому $\sphericalangle AMC = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2$.

Углы 1 и 2 — вписанные, поэтому

$$\sphericalangle 1 = \frac{1}{2}\sphericalangle ALC \text{ и } \sphericalangle 2 = \frac{1}{2}\sphericalangle BKD.$$

Таким образом, $\sphericalangle AMC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ALC + \sphericalangle BKD)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Угол AMC называется углом с вершиной внутри круга. Про полученное равенство для величины этого угла говорят так: угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой двух дуг, заключённых внутри этого и вертикального по отношению к нему угла.

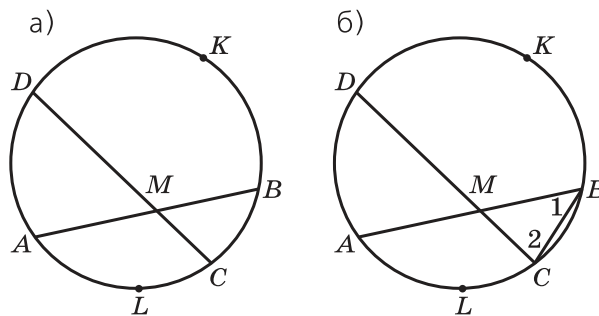


Рис. 50

106 е)

Дано: AB и BC — диаметры окружностей (рис. 51).

Доказать: $\angle BED = \angle BQP$ и $\angle BDE = \angle BPQ$.

Решение. Проведём через точку B прямую BF , перпендикулярную к AB . Так как эта прямая перпендикулярна к каждому из радиусов данных окружностей, проведённых в точку B , то она является касательной к каждой из

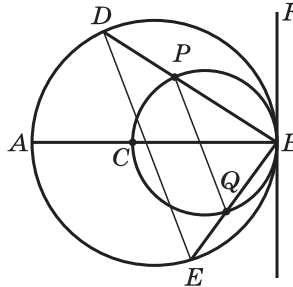


Рис. 51

этих окружностей. Поэтому $\angle FBD = \frac{1}{2} \cup BD$ (угол между касательной и хордой) и также $\angle FBP = \frac{1}{2} \cup BP$. Так как $\angle FBD$ и $\angle FBP$ — это один и тот же угол, то $\cup BD = \cup BP$.

$\angle BED = \frac{1}{2} \cup BD$ и $\angle BQP = \frac{1}{2} \cup BP$ (вписанные углы).

Так как $\cup BD = \cup BP$, то $\angle BED = \angle BQP$.

Аналогично доказывается, что $\angle BDE = \angle BPQ$.

106 ж)

Дано: AB — диаметр окружности, CD — касательная (рис. 52).

Доказать: $\angle ACD = \angle CBD$.

Решение. $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC$ (вписанный угол), $\angle BCD = \frac{1}{2} \cup BC$ (угол между касательной и хордой), следовательно, $\angle BAC = \angle BCD$. Таким образом, в треугольниках ACD и CBD углы BAC и BCD равны, а угол D общий, поэтому равны третьи углы: $\angle ACD = \angle CBD$, что и требовалось доказать.

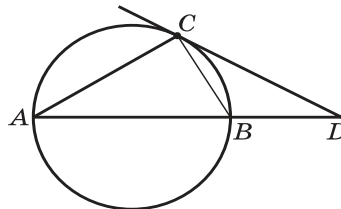


Рис. 52

106 з)

Доказать: $\angle AMB = \frac{1}{2} (\cup ALB - \cup CKD)$ (рис. 53).

Решение. Угол 1 — внешний угол треугольника AMC , поэтому $\angle 1 = \angle AMB + \angle 2$, откуда $\angle AMB = \angle 1 - \angle 2$.

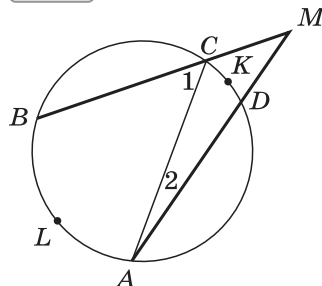


Рис. 53

Углы 1 и 2 — вписанные, поэтому $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup ALB$, $\angle 2 = \frac{1}{2} \cup CKD$. Следовательно, $\angle AMB = \frac{1}{2} (\cup ALB - \cup CKD)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Угол AMB называется углом с вершиной вне круга. Про полученное равенство для величины этого угла говорят так: угол с вершиной вне круга измеряется полуразностью заключённых внутри него дуг.

107 а)

Дано: равносторонний треугольник ABC и точка B_1 на стороне AC (рис. 54, а).

Построить: точки A_1 и C_1 на сторонах BC и AB так, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был равносторонним.

Решение. Отложим на лучах CB и BA отрезки CA_1 и BC_1 , равные AB_1 . Соединив точки A_1 , B_1 и C_1 отрезками, получим равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 54, б).

В самом деле, треугольники AB_1C_1 , BC_1A_1 и CA_1B_1 равны друг другу по двум сторонам ($AB_1 = BC_1 = CA_1$, $AC_1 = BA_1 = CB_1$) и углу между ними ($\angle A = \angle B = \angle C$), поэтому $B_1C_1 = C_1A_1 = A_1B_1$. Итак, построенные точки A_1 и C_1 — искомые.

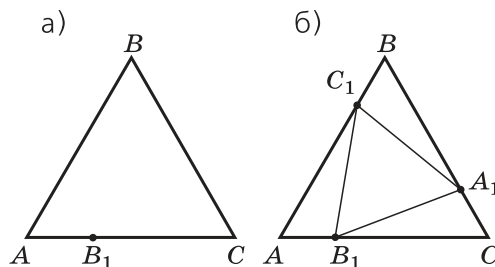


Рис. 54

107 б)

Дано: точки A и B , отрезок PQ (рис. 55, а).

Построить: окружность радиуса PQ , проходящую через точки A и B .

Решение. Предположим, что искомая окружность построена и точка O — её центр (рис. 55, б). Тогда в треугольнике AOB стороны OA и OB равны данному отрезку PQ . Отсюда следует, что искомую окружность можно

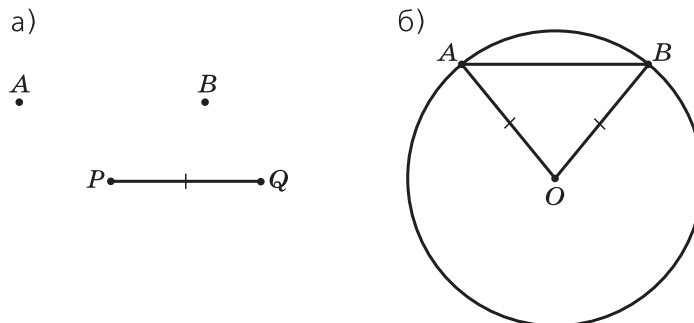


Рис. 55

построить так: сначала построим треугольник AOB по трём сторонам (AB , $OA = OB = PQ$), а затем проведём окружность с центром O радиуса OA .

107 к)

Дано: точки A, B, C .

Построить: точку, равноудалённую от точек A и B и удалённую от точки C на расстояние, равное AB .

Вопрос: сколько решений может иметь задача?

Решение. Искомая точка равноудалена от точек A и B , поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB . Кроме того, она удалена от точки C на расстояние, равное AB , и, следовательно, лежит на окружности радиуса AB с центром C . Отсюда следует, что для построения искомой точки нужно построить серединный перпендикуляр к отрезку AB (прямая a на рисунке 56) и окружность радиуса AB с центром C . Общая точка прямой a и указанной окружности является искомой точкой.

Возможны три случая.

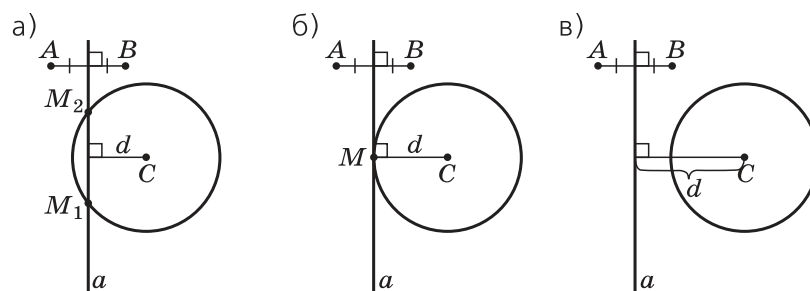


Рис. 56

I. Расстояние d от точки C до серединного перпендикуляра a к отрезку AB меньше AB ; в этом случае прямая a и построенная окружность пересекаются в двух точках M_1 и M_2 (рис. 56, а), т. е. задача имеет два решения.

II. Расстояние d от точки C до прямой a равно AB ; в этом случае прямая a касается окружности в точке M (рис. 56, б), т. е. задача имеет одно решение.

III. Расстояние d больше AB ; в этом случае прямая a и окружность не имеют общих точек (рис. 56, в), и, следовательно, задача не имеет решений.

Ответ: два, одно или ни одного решения.

107 л)

Дано: отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 ($P_1Q_1 > P_2Q_2$), острый угол hk (рис. 57, а).

Построить: остроугольный треугольник ABC , в котором $AB = P_1Q_1$, высота AH равна P_2Q_2 , $\angle A = \angle hk$.

Решение. Предположим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 57, б). Тогда в прямоугольном треугольнике ABH гипотенуза AB равна данному отрезку P_1Q_1 , а катет AH равен данному отрезку P_2Q_2 . Отсюда следует, что искомый треугольник ABC можно построить так: 1) строим прямоугольный треугольник ABH по гипотенузе и катету ($AB = P_1Q_1$, $AH = P_2Q_2$); 2) откладываем от луча AB угол BAD , равный углу hk , так, как показано на рисунке 57, б; 3) обозначим буквой C точку пересечения прямой BH и луча AD . Треугольник ABC искомый, так как он удовлетворяет всем условиям задачи.

Замечание. Отметим, что для заданных отрезков P_1Q_1 и P_2Q_2 ($P_1Q_1 > P_2Q_2$) и заданного острого угла hk задача не всегда имеет решение. Так, если данный угол hk окажется меньше угла BAH прямоугольного треугольника AHB , то треугольник ABC получится тупоугольным (рис. 57, в), а если $\angle hk = \angle BAH$, то треугольник ABC будет прямо-

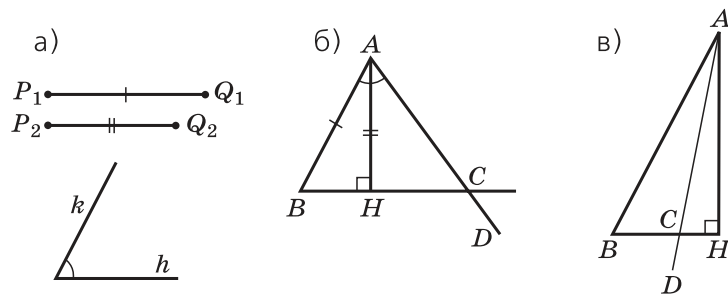


Рис. 57

угольным (точка C совпадёт с точкой H). В обоих случаях треугольник ABC не удовлетворяет условию задачи (он должен быть остроугольным).

107 р)

Дано: отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 , острый угол hk (рис. 58, а).

Построить: остроугольный треугольник ABC , в котором $\angle A = \angle hk$, а высоты AH и BK равны соответственно отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2 (рис. 58, б).

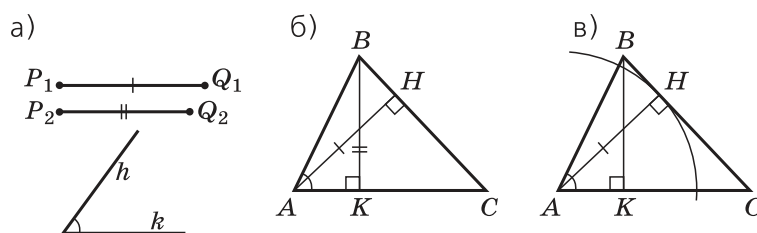


Рис. 58

Решение. Будем считать, что данные отрезки P_1Q_1 , P_2Q_2 и острый угол hk таковы, что задача имеет решение. Как видно из рисунка 58, б, в прямоугольном треугольнике AKB катет BK равен данному отрезку P_2Q_2 , а угол A равен данному углу hk . Заметим также, что прямая BC является касательной к окружности с центром A радиуса $AH = P_1Q_1$ (рис. 58, в). Поэтому искомым треугольник ABC можно построить так:

- 1) строим прямоугольный треугольник ABK по катету ($KB = P_2Q_2$) и противолежащему углу ($\angle A = \angle hk$);
- 2) проводим окружность радиуса P_1Q_1 с центром A ;
- 3) строим касательную к этой окружности, проходящую через точку B и пересекающую продолжение отрезка AK за точку K в некоторой точке;
- 4) обозначив эту точку буквой C , получим искомым треугольник ABC .

108 е)

Дано: $\angle AOB$ (рис. 59, а).

Построить: луч OM так, чтобы углы MOA и MOB были равными тупыми углами.

Решение. Построим биссектрису OC угла AOB , а затем проведём луч OM — продолжение луча OC (рис. 59, б). Луч OM является искомым лучом. В самом деле, углы MOA и MOB являются смежными с равными острыми углами AOC и BOC , поэтому углы MOA и MOB — равные тупые углы.

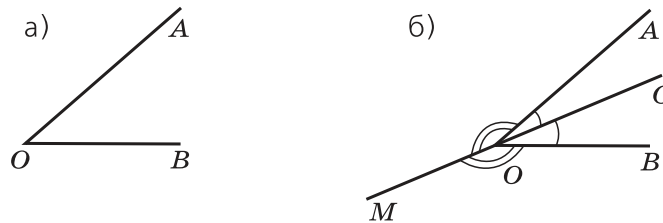


Рис. 59

109.

Дано: окружности радиуса AB с центрами A и B .

Доказать: эти окружности пересекаются в двух точках.

Решение. Пусть точка O — середина отрезка AB , прямая a — серединный перпендикуляр к этому отрезку (рис. 60, а). Центр A окружности радиуса $r = AB$ находится на расстоянии $d = \frac{1}{2} AB$ от прямой a . Так как $d < r$, то прямая a пересекается с окружностью в двух точках — M_1 и M_2 , при этом отрезок OM_1 является катетом прямоугольного треугольника AOM_1 с гипотенузой $AM_1 = AB$ и другим катетом $AO = \frac{1}{2} AB$.

Рассмотрим теперь окружность радиуса AB с центром B (рис. 60, б). Она также пересекается с серединным перпендикуляром a к отрезку AB в двух точках — M'_1 и M'_2 , при этом отрезок OM'_1 является катетом прямоугольного треугольника $BO M'_1$, равного треугольнику AOM_1 по гипотенузе и катету $\left(BM'_1 = AM_1 = AB, BO = AO = \frac{1}{2} AB \right)$. Следовательно, $OM'_1 = OM_1$, и, значит, точки M'_1 и M_1 совпадают.

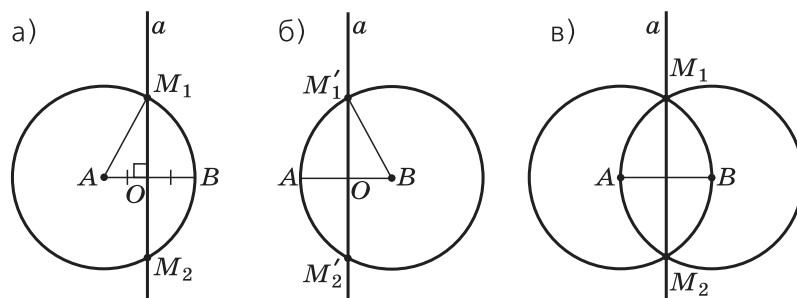


Рис. 60

Аналогично доказывается, что точки M'_2 и M_2 совпадают. Таким образом, окружности радиуса AB с центрами A и B имеют общие точки M_1 и M_2 (рис. 60, в).

Других общих точек (кроме M_1 и M_2) у данных окружностей нет, поскольку любая общая точка этих окружностей равноудалена от точек A и B и, следовательно, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB , а этот серединный перпендикуляр имеет ровно две общие точки с указанными окружностями (точки M_1 и M_2).

Итак, данные окружности пересекаются в двух точках, что и требовалось доказать.

113.

Дано: прямая a касается каждой из двух окружностей в точке M , прямая AB касается одной окружности в точке A , а другой — в точке B (рис. 61).

Найти: $\angle AMB$.

Решение. Касательные a и AB пересекаются в точке C (рис. 61). Так как отрезки касательных, проведённые из одной точки, равны, то $CA = CM$ и $CB = CM$. Проведём окружность с центром C радиуса CA . Она пройдёт через точки M и B , следовательно, угол AMB вписанный, опирающийся на полуокружность, поэтому $\angle AMB = 90^\circ$.

Ответ: $\angle AMB = 90^\circ$.

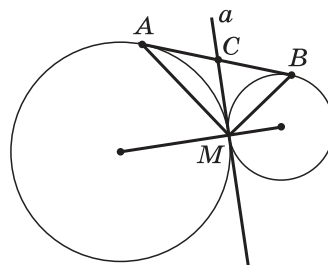


Рис. 61

115.

Дано: вершины остроугольного треугольника ABC лежат на окружности с центром O , AH — высота этого треугольника (рис. 62, а).

Доказать: $\angle OAC = \angle BAH$.

Решение. Рассмотрим два способа решения этой задачи.

1-й способ. Продолжим радиус AO до пересечения с окружностью в точке D (рис. 62, б).

$\angle ACD = 90^\circ$ (вписанный угол, опирающийся на полуокружность).

$\angle 1 = \angle 2$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу).

В прямоугольных треугольниках ACD и AHB выполняются равенства $\angle OAC = 90^\circ - \angle 2$ и $\angle BAH = 90^\circ - \angle 1$.

Так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle OAC = \angle BAH$, что и требовалось доказать.

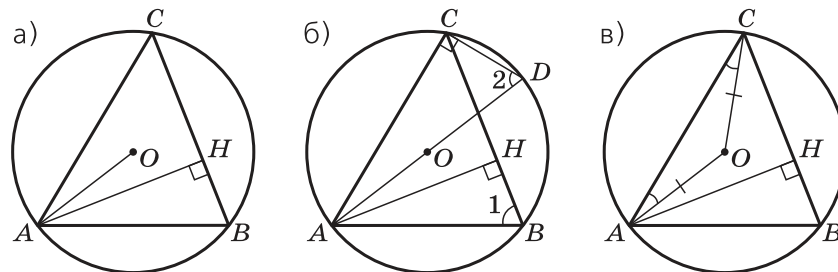


Рис. 62

2-й способ. Проведём радиус OC (рис. 62, в). В равнобедренном треугольнике AOC

$$\angle OAC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC.$$

Так как центральный угол AOC и вписанный угол B опираются на одну и ту же дугу, то $\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC$, и, следовательно, $\angle OAC = 90^\circ - \angle B$.

Треугольник AHB прямоугольный, поэтому $\angle BAN = 90^\circ - \angle B$. Таким образом, $\angle BAN = \angle OAC$, что и требовалось доказать.

117.

Дано: остроугольный $\triangle ABC$, AA_1 и BB_1 — высоты (рис. 63, а).

Доказать: $\angle AA_1B_1 = \angle BB_1A_1$.

Решение. Рассмотрим окружность с диаметром AB (рис. 63, б). Так как диаметр AB является гипотенузой прямоугольных треугольников AA_1B и AB_1B , то вершины A_1 и B_1 прямых углов этих треугольников лежат на этой

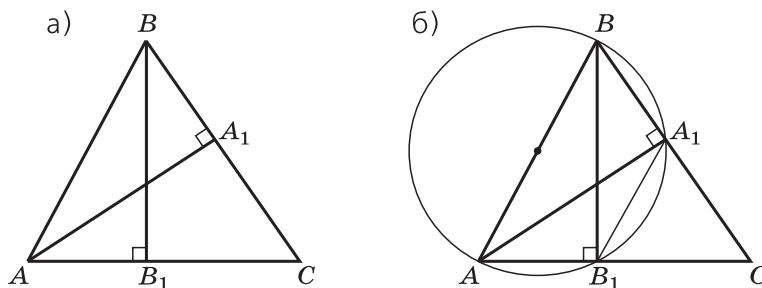


Рис. 63

окружности. Поэтому углы AA_1B_1 и ABB_1 вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AB_1 . Следовательно, они равны, что и требовалось доказать.

120.

Дано: рис. 64, а.

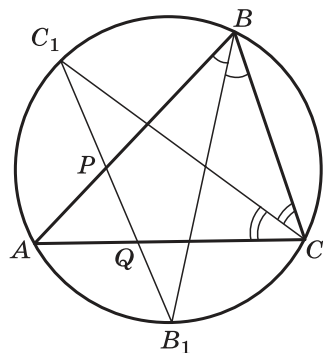
Доказать: $AP = AQ$.

Решение. Равные вписанные углы опираются на равные дуги, поэтому $\sphericalangle AB_1 = \sphericalangle B_1C$, $\sphericalangle AC_1 = \sphericalangle C_1B$ (рис. 64, б).

Согласно утверждению задачи 105 з), справедливы равенства $\angle 1 = \frac{1}{2}(\sphericalangle AB_1 + \sphericalangle C_1B)$, $\angle 2 = \frac{1}{2}(\sphericalangle B_1C + \sphericalangle AC_1)$.

Отсюда следует, что $\angle 1 = \angle 2$, и, значит, треугольник APQ равнобедренный, т. е. $AP = AQ$, что и требовалось доказать.

а)



б)

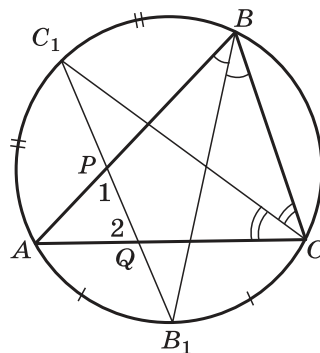


Рис. 64

121.

Дано: BM — биссектриса треугольника ABC (рис. 65).

Доказать: $\angle AMD = \angle BAD$.

Решение. Согласно утверждению задачи 105 з), выполнено равенство $\angle AMD = \frac{1}{2}(\sphericalangle AD + \sphericalangle CB)$. $\angle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle DCB = \frac{1}{2}(\sphericalangle DC + \sphericalangle CB)$ (вписанный угол).

Так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\sphericalangle AD = \sphericalangle DC$, поэтому $\angle AMD = \angle BAD$, что и требовалось доказать.

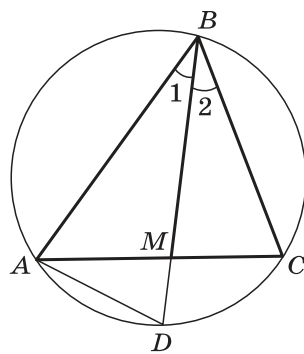


Рис. 65

122.

Дано: AB и CD — хорды, $AB \perp CD$, AB — биссектриса угла DAE (рис. 66).

Доказать: $AE \perp BC$ (рассмотреть все возможные случаи).

Решение. Возможны три случая.

I. Луч AE пересекает хорду CD в некоторой точке K (рис. 66, а). Так как $\angle 1 = \angle 2$ (по условию) и $\angle 2 = \angle 3$ (вписанные углы 2 и 3 опираются на одну и ту же дугу BD), то $\angle 1 = \angle 3$, а так как вертикальные углы равны, то $\angle 4 = \angle 5$.

Треугольник AOK прямоугольный (по условию), поэтому $\angle 1 + \angle 4 = 90^\circ$, и, следовательно, $\angle 3 + \angle 5 = 90^\circ$. Отсюда следует, что $\angle CMK = 180^\circ - (\angle 3 + \angle 5) = 90^\circ$, т. е. $AE \perp BC$.

II. Луч AE пересекает продолжение хорды CD в некоторой точке K (рис. 66, б). Так как $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$ и $\angle 3 = \angle 4$ (вертикальные углы), то $\angle 1 = \angle 4$.

Треугольник AOK прямоугольный, поэтому $\angle 1 + \angle 5 = 90^\circ$, и, следовательно, $\angle 4 + \angle 5 = 90^\circ$, откуда следует, что $\angle CMK = 90^\circ$, т. е. $AE \perp BC$.

III. Луч AE проходит через точку C (рис. 66, в). Так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle ACB = \angle BDC$. Отрезок AO — высота и биссектриса треугольника ACD , поэтому этот треугольник равнобедренный (задача 37 б)) и $\angle 3 = \angle 4$. Отсюда следует, что $\angle ACB = \angle ADB$. Таким образом, $\angle ACB = \angle ACB + \angle BDC = \angle ADB + \angle BDC = \angle ADB + \angle BDC = \angle ADB + \angle BDC = \angle ADB + \angle BDC = 180^\circ$, поэтому $\angle ACB = 90^\circ$, т. е. $AE \perp BC$.

Итак, в любом случае $AE \perp BC$, что и требовалось доказать.

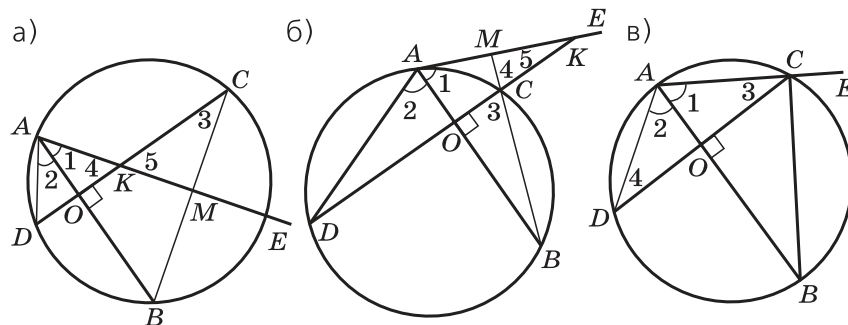


Рис. 66

126 г)

Дано: отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 , угол hk (рис. 67, а).

Построить: треугольник ABC , в котором $\angle A = \angle hk$, $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$.

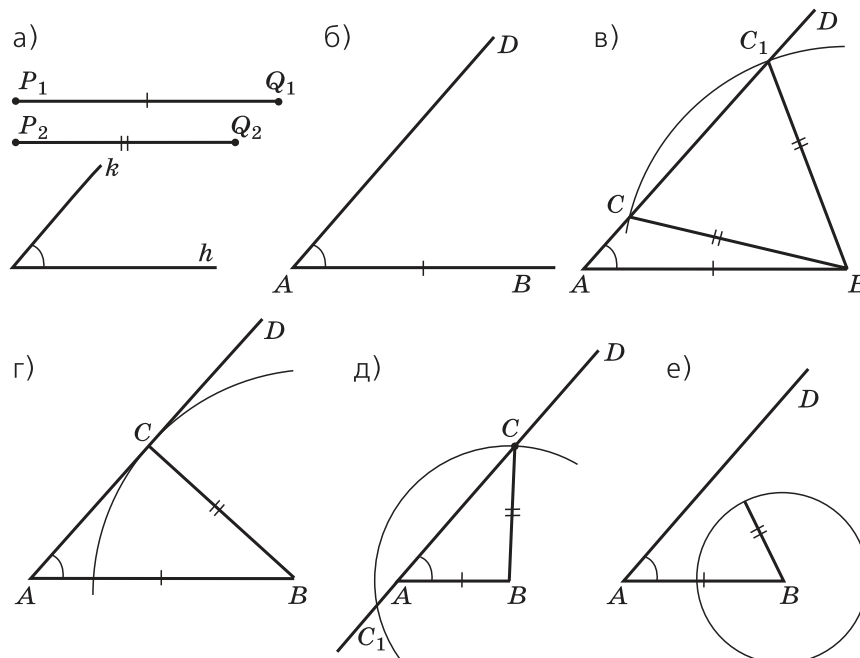


Рис. 67

Вопрос: сколько решений может иметь эта задача?

Решение. Проводим прямую и откладываем на ней отрезок AB , равный данному отрезку P_1Q_1 . Затем от луча AB откладываем угол DAB , равный данному углу hk (рис. 67, б).

Для построения точки C проведём окружность с центром B и радиусом, равным данному отрезку P_2Q_2 .

Возможны три случая.

I. Окружность пересекает луч AD в двух точках C и C_1 (рис. 67, в). В этом случае задача имеет два решения — треугольники ABC и ABC_1 .

II. Окружность имеет с лучом AD одну общую точку. Так будет, если она либо касается прямой AD в некоторой точке C (рис. 67, г), либо пересекает прямую AD в двух точках, но одна из этих точек лежит на луче AD (точка C на рисунке 67, д), а другая — либо на его продолжении (точка C_1 на рисунке 67, д), либо совпадает с точкой A . В этих случаях задача имеет одно решение — треугольник ABC .

III. Окружность не имеет с лучом AD общих точек. В этом случае задача не имеет решения (рис. 67, е).

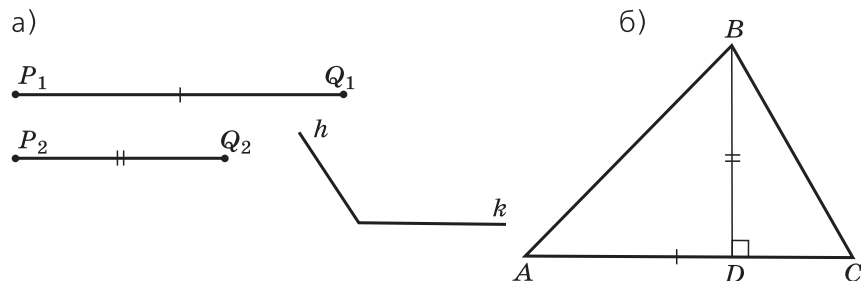


Рис. 68

128.

Дано: отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 , угол hk (рис. 68, а).

Построить: остроугольный треугольник ABC , в котором $\angle A + \angle B = \angle hk$, $AC = P_1Q_1$, высота BD равна P_2Q_2 (рис. 68, б).

Решение. В искомом треугольнике $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - \angle hk$, т. е. угол C равен углу, смежному с данным углом hk . Так как по условию искомый треугольник ABC остроугольный, то угол C должен быть острым, и, следовательно, данный угол hk должен быть тупым.

По данному углу hk строим смежный с ним угол, для этого нужно построить продолжение одного из лучей (h или k). Далее строим прямоугольный треугольник BDC по катету ($BD = P_2Q_2$) и противолежащему углу (угол C равен углу, смежному с углом hk). После этого на луче CD отложим отрезок CA , равный P_1Q_1 . Проведя отрезок AB , получим искомый треугольник ABC .

Отметим, что при заданных отрезках P_1Q_1 , P_2Q_2 и тупом угле hk задача не всегда имеет решение. Так, если отрезок P_1Q_1 окажется меньше, чем катет CD в построенном прямоугольном треугольнике BDC , то треугольник ABC получится тупоугольным, что не соответствует условию задачи.

130.

Построить: треугольник ABC по заданным отрезкам AB , BM и углам 1 и 2 (рис. 69).

Решение. Сначала построим треугольник ABM по двум сторонам (AB и BM) и углу 1, противолежащему стороне AB (задача 126 г)). Далее заметим, что угол 1 является внешним углом треугольника BMC , поэтому $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$, откуда $\angle 3 = \angle 1 - \angle 2$. По данным углам 1 и 2

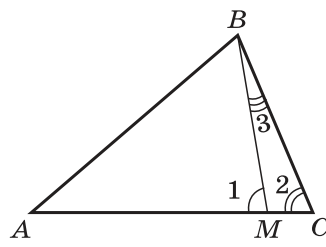


Рис. 69

построим угол, равный их разности, а затем отложим его от луча BM . В результате на луче AM получим точку C . Треугольник ABC искомым.

Задачи повышенной трудности

136 а)

Дано: пять попарно пересекающихся прямых, причём через точку пересечения любых двух из них проходит по крайней мере ещё одна из данных прямых.

Доказать: все данные прямые пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть прямые a_1 и a_2 пересекаются в точке M (рис. 70, а). По условию через точку M проходит по крайней мере ещё одна из данных прямых. Обозначим эту прямую a_3 (рис. 70, б) и докажем, что две оставшиеся прямые (обозначим их a_4 и a_5) также проходят через точку M . Предположим, что это не так. Пусть, например, прямая a_4 не проходит через точку M , а пересекается с прямыми a_1 , a_2 и a_3 соответственно в точках M_1 , M_2 и M_3 (рис. 70, в). Мы видим, что через каждую из точек M_1 , M_2 и M_3 проходят две прямые, а по условию через любую из них должна проходить по крайней мере ещё одна из данных прямых. Возьмём, например, точку M_1 . Прямые a_2 и a_3 не проходят

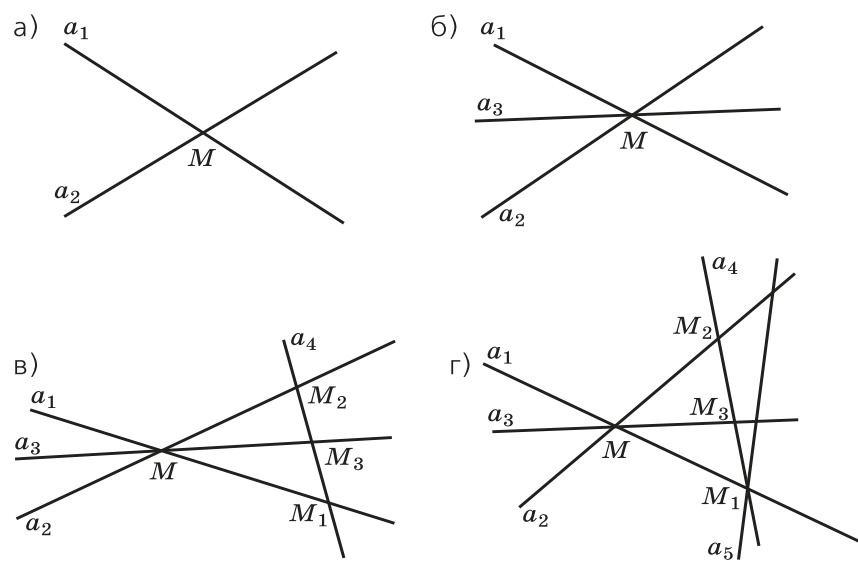


Рис. 70

через эту точку. Следовательно, через неё проходит прямая a_5 (рис. 70, z). Но тогда через точки M_2 и M_3 проходят только две из данных пяти прямых, что противоречит условию задачи. Теперь можно сделать вывод, что наше предположение о том, что прямая a_4 не проходит через точку M , ошибочно. Итак, прямая a_4 проходит через точку M . Аналогичные рассуждения приводят к выводу о том, что и прямая a_5 проходит через точку M .

Таким образом, все данные прямые пересекаются в одной точке (точке M), что и требовалось доказать.

140.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 71).

Доказать: прямые a и b не пересекаются.

Решение. Предположим, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке M (рис. 71, b ; на этом рисунке вершины углов 1 и 2 обозначены буквами A и B). Скопируем рисунок 71, b на лист прозрачной бумаги и повернём копию так, как показано на рисунке 71, $в$. Чтобы отличать копию от рисунка, буквы и цифры копии снабдим штрихом.

Наложим теперь копию на рисунок 71, b так, чтобы точка B' копии совместилась с точкой A рисунка, а точка A' копии — с точкой B рисунка. Так как углы 1 и 2', а также углы 1' и 2 равны, то прямая b' копии совместится с прямой a рисунка, а прямая a' копии — с прямой b рисунка. Таким образом, копия полностью совместится с рисунком (рис. 71, $г$). Мы видим, что прямые a и b пересекаются в двух точках: M и M' . Но этого не может быть (две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек). Следовательно, наше предположение о том,

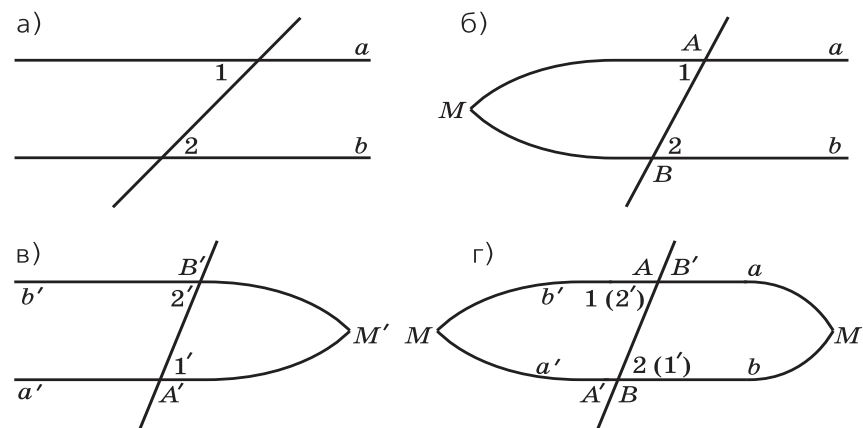


Рис. 71

что прямые a и b пересекаются в некоторой точке, ошибочно.

Таким образом, прямые a и b не пересекаются, что и требовалось доказать.

141.

Дано: $\angle QOP$, $OA = OB$, $AC = BD$, прямые AD и BC пересекаются в точке E (рис. 72).

Доказать: луч OE — биссектриса угла POQ .

Описать: основанный на этом факте способ построения биссектрисы угла.

Решение. 1) $\triangle OAD = \triangle OBC$ (по первому признаку: $OA = OB$, $OD = OC$, угол O — общий), следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 4 = \angle 3$ (рис. 72, б). Из последнего равенства следует, что $\angle 6 = \angle 5$ (углы 6 и 5 — смежные с равными углами 4 и 3).

2) $\triangle EAC = \triangle EBD$ (по второму признаку: $AC = BD$, $\angle 2 = \angle 1$, $\angle 6 = \angle 5$) (рис. 72, в), следовательно, $EC = ED$.

3) $\triangle OEC = \triangle OED$ (по третьему признаку: OE — общая сторона, $EC = ED$, $OC = OD$) (рис. 72, г), следовательно, $\angle COE = \angle DOE$, т. е. луч OE — биссектриса угла POQ , что и требовалось доказать.

Замечание. Эта задача интересна тем, что в её решении последовательно используются все три признака равенства треугольников. Другое достоинство этой задачи состоит в том, что она даёт ещё один способ построения биссектрисы данного угла POQ : на луче OP нужно отметить какие-то точки A и C так, что $OC > OA$, а на луче OQ отложить последовательно отрезок OB , равный OA , и отрезок BD , равный AC (см. рис. 72, а), затем нужно провести

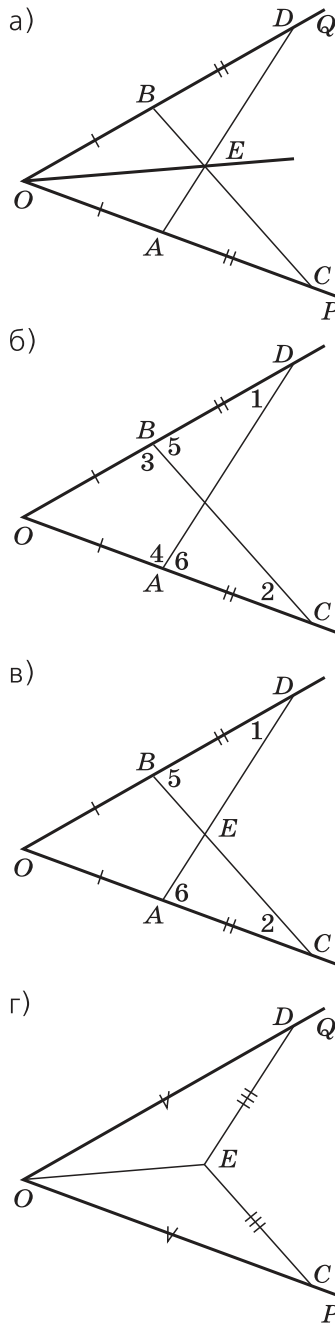


Рис. 72

отрезки AD и BC и через точку E их пересечения провести луч OE . Согласно доказанному, луч OE является биссектрисой угла POQ .

144.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$, $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$ (рис. 73, а).

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Решение. 1) Продолжим стороны AB и A_1B_1 на отрезки $BD = BC$ и $B_1D_1 = B_1C_1$ (рис. 73, б). Тогда $AD = AB + BD = AB + BC$, $A_1D_1 = A_1B_1 + B_1D_1 = A_1B_1 + B_1C_1$, и, следовательно, $AD = A_1D_1$.

2) $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними: $AD = A_1D_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$). Поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$.

3) Так как треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равнобедренные, то $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$, а поскольку $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 3 = \angle 4$.

4) $\angle ACB = \angle ACD - \angle 3$, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1C_1D_1 - \angle 4$, а так как $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$ и $\angle 3 = \angle 4$, то $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$.

5) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по стороне и прилежащим к ней углам: $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ по условию, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$), что и требовалось доказать.

Замечание. После п. 2) возможно другое продолжение решения.

3) В равнобедренных треугольниках BCD и $B_1C_1D_1$ $CD = C_1D_1$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, поэтому эти треугольники равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам), и, следовательно, $BC = B_1C_1$.

4) Так как $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, то $AB = A_1B_1$. Кроме того, $AC = A_1C_1$ (по условию). Таким

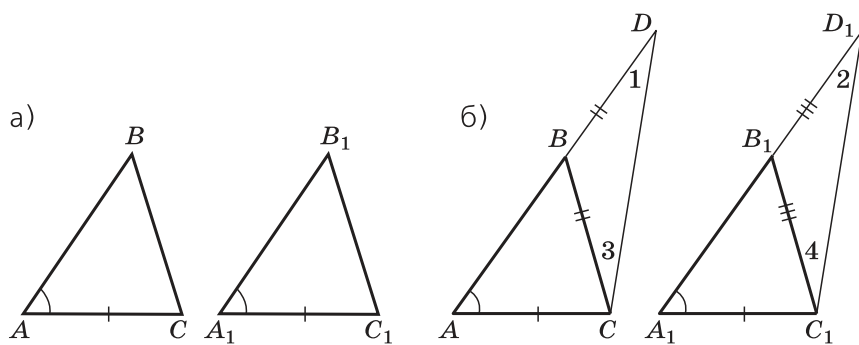


Рис. 73

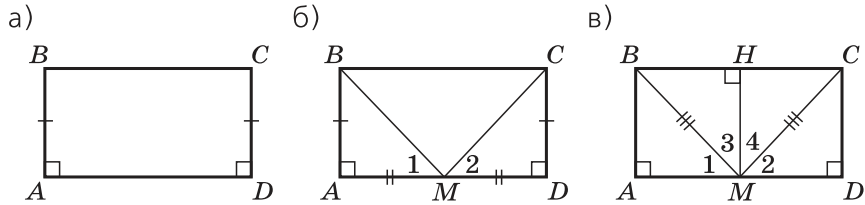


Рис. 74

образом, стороны треугольника ABC соответственно равны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по трём сторонам), что и требовалось доказать.

150.

Дано: четырёхугольник $ABCD$, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AB = CD$ (рис. 74, а).

Доказать: $ABCD$ — прямоугольник.

Решение. Пусть точка M — середина AD . Тогда $\triangle BAM = \triangle CDM$ (по двум катетам), поэтому $MB = MC$ и $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 74, б). Проведём высоту MH в равнобедренном треугольнике BCM (рис. 74, в). Так как $\angle 3 = \angle 4$ (высота MH является биссектрисой) и $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle AMH = \angle DMH = 90^\circ$.

Таким образом, в четырёхугольнике $ABHM$ три угла прямые ($\angle A = \angle H = \angle M = 90^\circ$), поэтому $ABHM$ — прямоугольник и $\angle B = 90^\circ$.

В четырёхугольнике $ABCD$ также три угла прямые ($\angle A = \angle D = \angle B = 90^\circ$), следовательно, $ABCD$ — прямоугольник, что и требовалось доказать.

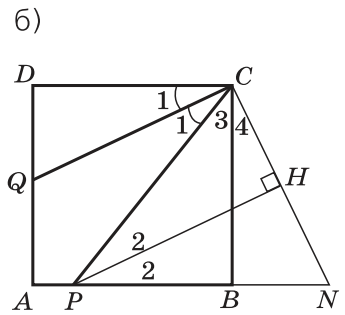
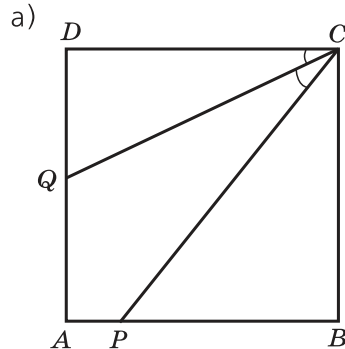


Рис. 75

151.

Дано: квадрат $ABCD$, P — точка на стороне AB , CQ — биссектриса угла DCP (рис. 75, а).

Доказать: $CP = DQ + BP$.

Решение. На луче PB отложим отрезок $PN = CP$ и проведём высоту PH в равнобедренном треугольнике CPN . Она является также биссектрисой (рис. 75, б). Так как $2\angle 1 + \angle 3 = \angle C = 90^\circ$ и $2\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ (сумма острых углов пря-

моугольного треугольника CBP), то $\angle 1 = \angle 2$. Кроме того, $\angle 2 + (\angle 3 + \angle 4) = 90^\circ$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника PHC). Из последнего равенства и равенства $2\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ следует, что $\angle 4 = \angle 2$, и поэтому $\angle 4 = \angle 1$.

Прямоугольные треугольники BCN и DCQ равны по катету ($BC = DC$) и прилежащему острому углу ($\angle 4 = \angle 1$), следовательно, $BN = DQ$.

Таким образом, $CP = PN = PB + BN = PB + DQ$. Итак, $CP = DQ + BP$, что и требовалось доказать.

155.

Дано: четырёхугольник $ABCD$, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, точки M и N — середины сторон AB и CD .

Доказать: $2MN = AD + BC$.

Решение. Возможны два случая.

I. $AD = BC$ (рис. 76, а). В этом случае $ABCD$ — прямоугольник (задача 150), поэтому $AB = CD$ и $BM = CN$ (рис. 76, б). Так как $\angle B = \angle C = 90^\circ$ и $BM = CN$, то $BMNC$ — прямоугольник (задача 150), и, следовательно, $BC = MN$. Таким образом, $AD = BC = MN$, откуда следует, что $2MN = AD + BC$.

II. $AD \neq BC$. Пусть, например, $AD < BC$ (рис. 76, в), и пусть N_1 и D_1 — проекции точек N и D на прямую BC . Так как $CN = ND$, то $CN_1 = N_1D_1$ (проекции равных отрезков равны).

В четырёхугольнике ABD_1D три угла прямые ($\angle A = \angle B = \angle D_1 = 90^\circ$), поэтому ABD_1D — прямоугольник и $AD = BD_1$.

Пусть K — середина DD_1 (рис. 76, г). Согласно доказанному в первом случае, четырёхугольник $BMKD_1$ — прямоугольник, поэтому $\angle MKD_1 = 90^\circ$ и $MK = BD_1$. В прямоугольном треугольнике D_1DC медиана D_1N равна половине гипотенузы, т. е. $D_1N = DN$, и, значит, треугольник DND_1 равнобедренный. Медиана NK этого треугольника является также высотой, т. е. $\angle NKD_1 = 90^\circ$. Так как $\angle MKD_1 = 90^\circ$ и $\angle NKD_1 = 90^\circ$, то точки M , K и N лежат на одной прямой, поэтому $MN = MK + KN$.

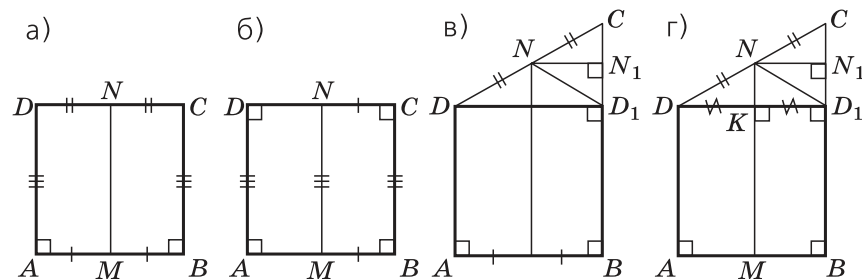


Рис. 76

В четырёхугольнике KNN_1D_1 три угла прямые ($\angle K = \angle N_1 = \angle D_1 = 90^\circ$), следовательно, KNN_1D_1 — прямоугольник и $KN = N_1D_1$.

Итак, $MN = MK + KN$, $MK = BD_1 = AD$, $KN = N_1D_1 = CN_1$. Используя эти равенства, получаем:

$$2MN = 2(MK + KN) = 2MK + 2KN = (AD + BD_1) + (CN_1 + N_1D_1) = AD + (BD_1 + CD_1) = AD + BC.$$

Таким образом, равенство $2MN = AD + BC$ доказано.

158.

Дано: AD — биссектриса, AH — высота, AM — медиана треугольника ABC , $AB \neq AC$.

Доказать: точка D лежит между точками M и H .

Решение. Пусть, например, $AB < AC$ (рис. 77, а). Докажем сначала, что $\angle BAM > \angle CAM$. Продолжим медиану AM на отрезок $MK = AM$ (рис. 77, б). $\triangle KMC = \triangle AMB$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $KC = AB$ и $\angle CKM = \angle BAM$. В треугольнике AKC выполняется неравенство $AC > KC$ (так как $AC > AB = KC$), поэтому $\angle CKA > \angle CAK$, откуда следует, что $\angle BAM > \angle CAM$.

Из последнего неравенства и равенства $\angle BAD = \angle CAD$ вытекает, что луч AD проходит внутри угла BAM (рис. 77, в), и, следовательно, точка D лежит между точками B и M , а так как точка H лежит на луче DB (задача 157), то точка D лежит между точками M и H , что и требовалось доказать.

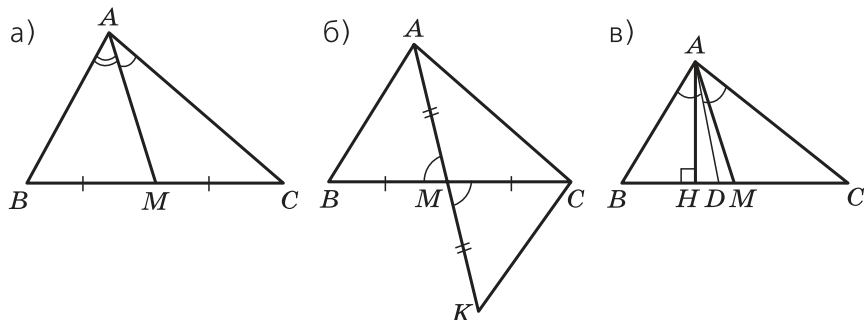


Рис. 77

161.

Дано: $ABCD$ — квадрат, $\angle ABM = 75^\circ$, $\angle CDM = 30^\circ$ (рис. 78, а).

Найти: $\angle MAB$.

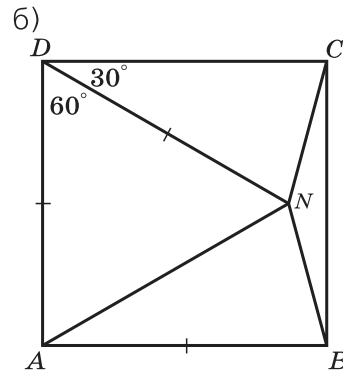
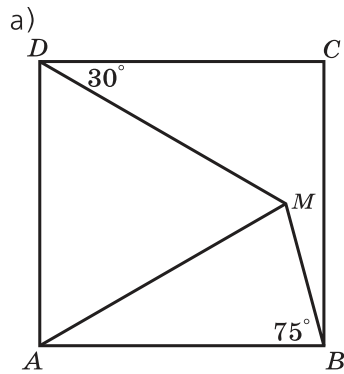


Рис. 78

Решение. Отложим на луче DM отрезок $DN = AB$ (рис. 78, б) и докажем, что точка N совпадает с точкой M .

Так как $\angle ADN = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ и $DA = DN$, то $\angle DAN = \angle DNA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADN) = 60^\circ$. Следовательно, треугольник ADN равносторонний. Отсюда следует, что $AN = AB$, т. е. треугольник ABN равнобедренный и $\angle NAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Поэтому

$$\begin{aligned} \angle ABN &= \angle ANB = \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle NAB) = 75^\circ. \end{aligned}$$

Так как $\angle ABN = 75^\circ$, то луч BN совпадает с лучом AM , и, следовательно, точка N совпадает с точкой M . Таким образом, $\angle MAB = \angle NAB = 30^\circ$.

Ответ: $\angle MAB = 30^\circ$.

165.

Дано: точка D лежит на биссектрисе внешнего угла с вершиной A треугольника ABC (рис. 79, а).

Доказать: $BC + CD + DB > BC + CA + AB$.

Решение. В обе части этого неравенства входит слагаемое BC , поэтому достаточно доказать, что

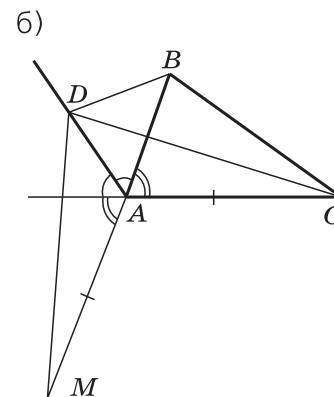
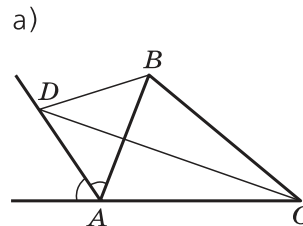


Рис. 79

$CD + DB > AB + CA$. Продолжим сторону BA на отрезок $AM = AC$ (рис. 79, б). Треугольники DAM и DAC равны по двум сторонам (DA — общая сторона, $AM = AC$) и углу между ними ($\angle DAM = \angle DAC$), поэтому $MD = CD$.

Запишем неравенство треугольника применительно к треугольнику BDM : $MD + DB > MB$. Но $MB = AB + AM = AB + AC$ и $MD = CD$. Следовательно, $CD + DB > AB + CA$, что и требовалось доказать.

167.

Дано: треугольник ABC с тупым углом A , точки P и Q лежат внутри треугольника ABC (рис. 80, а).

Вопрос: может ли выполняться неравенство $\angle BAP \geq \angle BQC$?

Решение. Продолжим отрезок BQ до пересечения со стороной AC в точке M (рис. 80, б). Угол BMC — внешний угол треугольника ABM , поэтому $\angle BMC > \angle BAM$, а так как $\angle BAM > \angle BAP$, то $\angle BAP < \angle BMC$.

Угол BQC — внешний угол треугольника MQC , поэтому $\angle BQC > \angle QMC = \angle BMC$. Из неравенств $\angle BAP < \angle BMC$ и $\angle BMC < \angle BQC$ следует, что $\angle BAP < \angle BQC$. Таким образом, неравенство $\angle BAP \geq \angle BQC$ выполняться не может.

Ответ: не может.

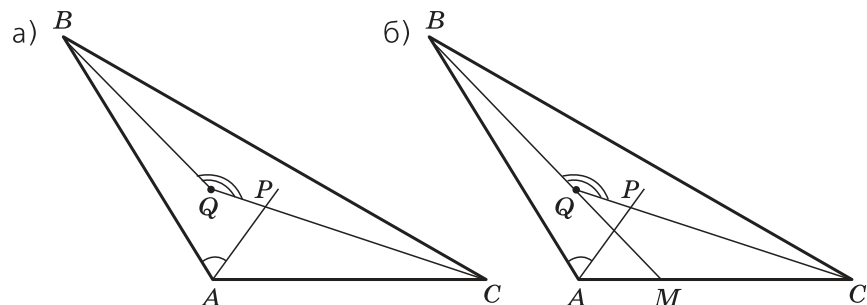


Рис. 80

171.

Дано: AM — медиана, AH — высота треугольника ABC , $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ (рис. 81, а).

Доказать: треугольник ABC — прямоугольный.

Решение. 1) $\triangle AMH = \triangle ABH$ (по катету и прилежащему острому углу: AH — общий катет, $\angle 2 = \angle 3$), поэтому $MH = HB = \frac{1}{2} MB = \frac{1}{2} MC$.

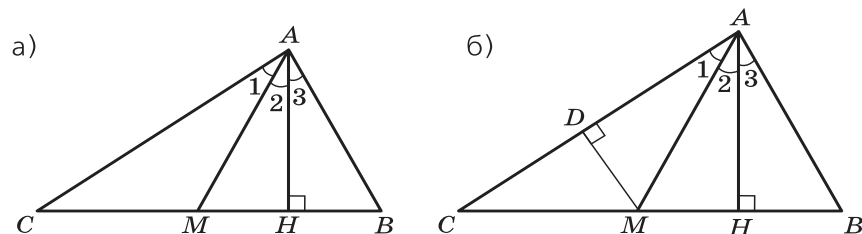


Рис. 81

2) Проведём перпендикуляр MD к стороне AC (рис. 81, б). $\triangle AMD = \triangle AMH$ (по гипотенузе и острому углу: AM — общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$), поэтому $MD = MH = \frac{1}{2} MC$.

3) Так как в прямоугольном треугольнике CDM катет MD равен половине гипотенузы MC , то $\angle C = 30^\circ$.

4) Треугольник ACH прямоугольный, поэтому $\angle CAH = \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ - \angle C = 60^\circ$, а, значит, $\angle 1 = 30^\circ$. Следовательно, $\angle CAB = 90^\circ$, т. е. треугольник ABC прямоугольный, что и требовалось доказать.

172.

Дано: треугольник ABC , в котором $AB = AC$ и $\angle A = 80^\circ$; точка M лежит внутри этого треугольника, $\angle MBC = 30^\circ$, $\angle MCB = 10^\circ$ (рис. 82, а).

Найти: $\angle AMC$.

Решение. Пусть O — точка пересечения биссектрисы угла A и прямой BM (рис. 82, б).

1) Так как $\angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 50^\circ$, то $\angle ABO = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$.

2) $\triangle AOC = \triangle AOB$ (по двум сторонам и углу между ними: $AB = AC$, AO — общая сторона, $\angle CAO = \angle BAO = 40^\circ$), следовательно, $\angle ACO = \angle ABO = 20^\circ$.

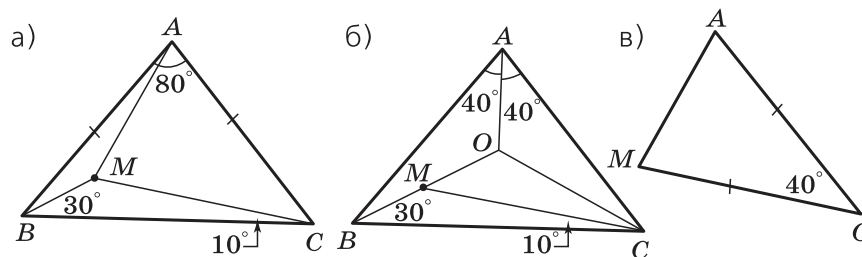


Рис. 82

- 3) $\angle MCO = \angle ACB - \angle ACO - \angle MCB = 50^\circ - 20^\circ - 10^\circ = 20^\circ$.
 4) Угол OMC — внешний угол треугольника BMC , поэтому $\angle OMC = \angle MBC + \angle MCB = 30^\circ + 10^\circ = 40^\circ$.
 5) $\triangle AOC = \triangle MOC$ (по стороне и прилежащим к ней углам: OC — общая сторона, $\angle ACO = \angle MCO = 20^\circ$, $\angle AOC = 180^\circ - (\angle OAC + \angle ACO) = 120^\circ$, и также $\angle MOC = 180^\circ - (\angle OMC + \angle MCO) = 120^\circ$), поэтому $AC = MC$.
 6) Так как $AC = MC$, то треугольник AMC равнобедренный (рис. 82, в), причём $\angle ACM = \angle ACB - \angle MCB = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$. Следовательно, $\angle AMC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACM) = 70^\circ$.

Ответ: $\angle AMC = 70^\circ$.

173.

Дано: треугольник ABC , в котором $AB = AC$, $\angle A = 80^\circ$, точка M лежит внутри треугольника, $\angle MBC = 30^\circ$, $\angle MCA = 10^\circ$ (рис. 83, а).

Найти: $\angle MAB$.

Решение. Пусть O — точка пересечения биссектрисы угла A и прямой BM (рис. 83, б).

1) Так как $\angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 50^\circ$, то $\angle ABO = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$.

2) $\triangle AOB = \triangle AOC$ (по двум сторонам и углу между ними: $AB = AC$, AO — общая сторона, $\angle BAO = \angle CAO = 40^\circ$), поэтому $\angle ACO = \angle ABO = 20^\circ$, $\angle AOB = \angle AOC = 180^\circ - (40^\circ + 20^\circ) = 120^\circ$.

3) $\angle AOM = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$, $\angle COM = \angle AOC - \angle AOM = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, следовательно, луч OM — биссектриса угла AOC .

4) $\angle MCO = \angle ACO - \angle MCA = 20^\circ - 10^\circ = 10^\circ$, поэтому $\angle MCO = \angle MCA$, т. е. луч CM — биссектриса угла ACO .

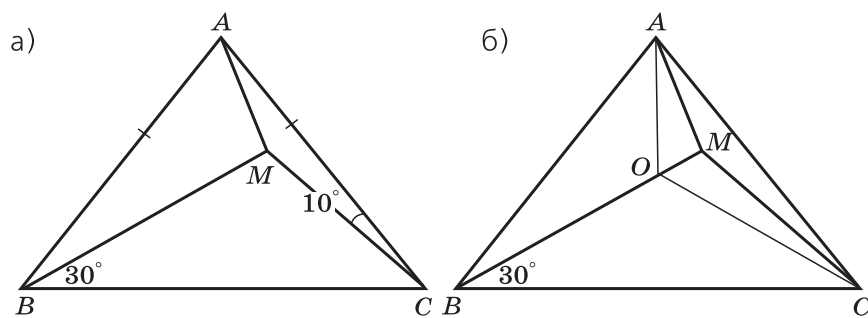


Рис. 83

5) Таким образом, лучи OM и CM — биссектрисы углов треугольника AOC , и, следовательно, луч AM — также биссектриса этого треугольника (задача 47 в)), поэтому $\angle MAO = \frac{1}{2} \angle CAO = 20^\circ$.

6) $\angle MAB = \angle MAO + \angle BAO = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.

Ответ: $\angle MAB = 60^\circ$.

174.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 50^\circ$, точки M и N лежат на сторонах AB и AC , $\angle MCB = 40^\circ$, $\angle NBC = 50^\circ$ (рис. 84, а).

Найти: $\angle NMC$.

Решение. 1) Проведём луч BK так, что $\angle KBC = 30^\circ$ (рис. 84, б). В треугольнике NBC

$$\angle NBC = \angle NCB = 50^\circ, \angle BNC = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ.$$

Следовательно, треугольник NBC равнобедренный, отрезок BC — его основание, $\angle N = 80^\circ$, а точка K расположена внутри этого треугольника так же, как точка M внутри треугольника ABC в задаче 173. Согласно результату задачи 173, $\angle KNB = 60^\circ$.

2) Пусть H — точка пересечения отрезков BN и CM . Тогда

$$\angle BHC = 180^\circ - \angle HBC - \angle HCB = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ.$$

Следовательно, отрезок BH — биссектриса и высота треугольника BMK (см. рис. 84, б), и, значит, этот треугольник равнобедренный: $BM = BK$ (задача 37 б)).

3) $\triangle BNM = \triangle BNK$ (по двум сторонам и углу между ними: $BM = BK$, BN — общая сторона, $\angle MBN = \angle KBN = 20^\circ$), поэтому $\angle MNB = \angle KNB = 60^\circ$.

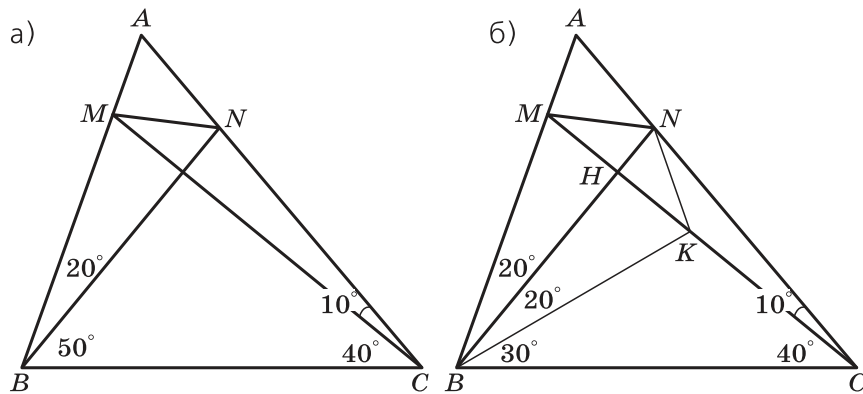


Рис. 84

- 4) Так как треугольник MHN прямоугольный, то
 $\angle NMH = 90^\circ - \angle MNH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Итак, $\angle NMC = \angle NMH = 30^\circ$.

Ответ: $\angle NMC = 30^\circ$.

175.

Дано: треугольник ABC , в котором $BA = BC$ и $\angle B = 20^\circ$; точки Q и P лежат на сторонах BA и BC , $\angle ACQ = 60^\circ$, $\angle CAP = 50^\circ$ (рис. 85, а).

Найти: $\angle APQ$.

Решение. Пусть O — точка пересечения биссектрисы угла B и прямой CQ , M — точка пересечения прямых AO и BC (рис. 85, б).

1) Прямая BO является серединным перпендикуляром к основанию AC равнобедренного треугольника ABC , поэтому $OA = OC$, и, следовательно, $\angle OAC = \angle OCA = 60^\circ$, $\angle AOC = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$.

Таким образом, $\triangle AOC$ равносторонний: $OA = AC = CO$.

2) $\triangle AOQ = \triangle COM$ (по стороне и прилежащим к ней углам: $AO = CO$; $\angle AOQ = \angle COM = 180^\circ - \angle AOC = 120^\circ$; $\angle QAO = \angle MCO$, так как $\angle A = \angle C = 0,5(180^\circ - \angle B) = 80^\circ$, $\angle QAO = \angle A - 60^\circ = 20^\circ$, $\angle MCO = \angle C - 60^\circ = 20^\circ$), поэтому $OQ = OM$, а поскольку $\angle QOM = \angle AOC = 60^\circ$, то треугольник QOM равносторонний, в частности, $QO = OM$.

3) Так как $\angle CAP = 50^\circ$ и $\angle C = 80^\circ$, то $\angle CPA = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$. Итак, $\angle CAP = \angle CPA$, поэтому $AC = CP$.

4) Так как $AC = CO$ и $AC = CP$, то $CO = CP$, т. е. треугольник COP равнобедренный, и, следовательно, $\angle COP = 0,5(180^\circ - 20^\circ) = 80^\circ$ (см. рис. 85, б).

5) $\angle MOP = 180^\circ - \angle COP - \angle QOM = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$;

$\angle OMP = \angle AMC = 180^\circ - \angle MAC - \angle MCA = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$.

Таким образом, $\angle MOP = \angle OMP$, откуда следует, что $PO = PM$.

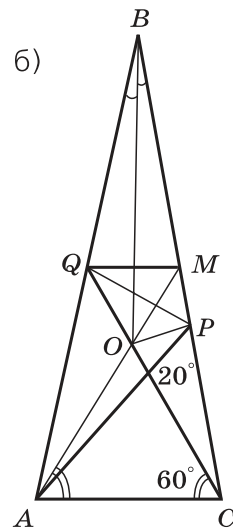
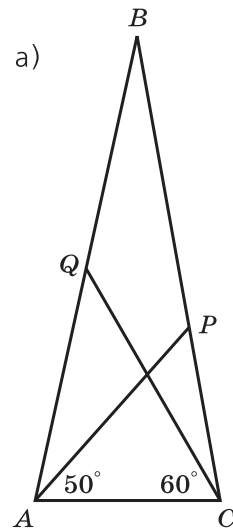


Рис. 85

6) Равенства $QO = QM$ и $PO = PM$ означают, что точки P и Q равноудалены от концов отрезка OM . Следовательно, прямая PQ — серединный перпендикуляр к отрезку OM , поэтому луч QP — биссектриса угла OQM равностороннего треугольника QOM , и, значит, $\angle OQP = 30^\circ$.

7) Ясно, что $\angle APQ = 180^\circ - \angle PAQ - \angle AQP$.

Так как $\angle PAQ = \angle A - \angle CAP = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$, $\angle AQP = \angle AQC + \angle OQP = (180^\circ - \angle QAC - \angle ACQ) + 30^\circ = (180^\circ - 80^\circ - 60^\circ) + 30^\circ = 70^\circ$, то $\angle APQ = 180^\circ - 30^\circ - 70^\circ = 80^\circ$.

Ответ: $\angle APQ = 80^\circ$.

177.

Дано: треугольник ABC — равносторонний, точка M лежит внутри угла ABC , $\angle AMB = 30^\circ$, $\angle MBC = 23^\circ$ (рис. 86, а).

Найти: $\angle BAM$ и $\angle BCM$.

Решение. Рассмотрим окружность с центром C радиуса AB (рис. 86, б). Угол ACB — центральный угол этой окружности, поэтому $\sphericalangle AB = \angle ACB = 60^\circ$.

Если предположить, что точка M лежит внутри круга с центром C радиуса AB , то получим $\angle AMB = 0,5(\sphericalangle AB + \sphericalangle A_1B_1)$ (задача 105 з), откуда следует, что $\angle AMB = 30^\circ + 0,5\sphericalangle A_1B_1 > 30^\circ$, что противоречит условию задачи.

Если предположить, что точка C лежит вне указанного круга (рис. 86, в), то получим $\angle AMB = 0,5(\sphericalangle AB - \sphericalangle A_1B_1) = 30^\circ - 0,5\sphericalangle A_1B_1 < 30^\circ$ (задача 106 з), что также противоречит условию задачи.

Следовательно, точка M лежит на окружности с центром C радиуса AB (рис. 86, г). Поэтому $\sphericalangle MD = 2\angle MBD = 46^\circ$, $\sphericalangle BKM = 180^\circ + \sphericalangle MD = 226^\circ$, $\sphericalangle BAM = 180^\circ - \sphericalangle MD = 134^\circ$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\angle BAM &= 0,5\sphericalangle BKM = 113^\circ \text{ (вписанный угол),} \\ \angle BCM &= \sphericalangle BAM = 134^\circ \text{ (центральный угол).}\end{aligned}$$

Ответ: $\angle BAM = 113^\circ$ и $\angle BCM = 134^\circ$.

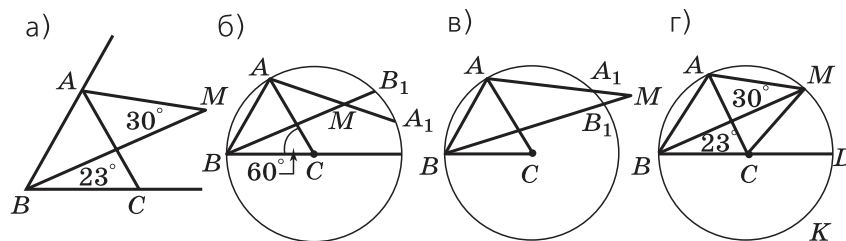


Рис. 86

178.

Дано: гипотенузы BC и B_1C_1 прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны, $AB < A_1B_1$.

Доказать: $AC > A_1C_1$.

Решение. Рассмотрим сначала два вспомогательных утверждения.

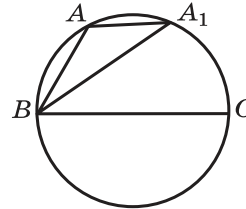
1) Если точки A и A_1 лежат на полуокружности с диаметром BC и $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BA_1C$, то $BA < BA_1$ (рис. 87, а).

В самом деле, вписанный угол $BA A_1$ опирается на дугу $BC A_1$, которая больше или равна 180° (равна 180° тогда, когда точка A_1 совпадает с точкой C). Следовательно, угол $BA A_1$ тупой или прямой, и поэтому в треугольнике $BA A_1$ сторона BA_1 , лежащая против этого угла, является наибольшей, в частности, $BA < BA_1$. Утверждение 1 доказано.

2) Обратное утверждение: если точки A и A_1 лежат на полуокружности с диаметром BC и $BA < BA_1$, то $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BA_1C$. Это утверждение легко доказать от противного, используя утверждение 1.

Перейдём теперь к решению нашей задачи. Наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы совместились вершины B и B_1 , C и C_1 , а вершины A и A_1 оказались по одну сторону от прямой BC , и рассмотрим окружность с диаметром BC (рис. 87, б). Так как $AB < A_1B_1$, то $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BA_1C$ (утверждение 1), поэтому $\sphericalangle ACB > \sphericalangle A_1C_1B$, и, следовательно, согласно утверждению 2, выполняется неравенство $AC > A_1C_1$, что и требовалось доказать.

а)



б)

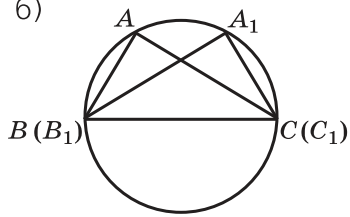


Рис. 87

179.

Дано: AA_1 , BB_1 , CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC (рис. 88).

Доказать: A_1A , B_1B , C_1C — биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$ (задача 117). Аналогично доказывается, что $\angle AA_1C_1 = \angle ACC_1$.

В прямоугольных треугольниках ABB_1 и ACC_1 выполняются равенства $\angle ABB_1 = 90^\circ - \angle A$, $\angle ACC_1 = 90^\circ - \angle A$. Следовательно, $\angle ABB_1 = \angle ACC_1$,

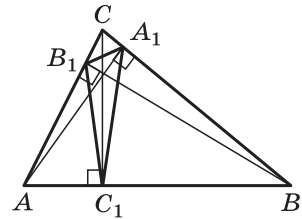


Рис. 88

и, значит, $\angle AA_1B_1 = \angle AA_1C_1$, т. е. луч A_1A — биссектриса угла A_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

Аналогично доказывается, что лучи B_1B и C_1C — биссектрисы углов B_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

180.

Дано: $ABCD$ — прямоугольник, точки P и E лежат на сторонах BC и CD , $\triangle APE$ — равносторонний, $AK = KE$, $AM = MP$ (рис. 89, а).

Доказать: треугольники BKC и CMD равносторонние.

Решение. Рассмотрим окружность с диаметром PE (рис. 89, б). Поскольку отрезок PE является гипотенузой прямоугольных треугольников PCE и PKE ($PK \perp KE$, так как PK — медиана равностороннего треугольника APE), то точки C и K лежат на этой окружности. Вписанные углы PCK и PEK опираются на одну и ту же дугу PK , поэтому $\angle PCK = \angle PEK = 60^\circ$.

Аналогично, рассматривая окружность с диаметром PA (рис. 89, в, на этой окружности лежат точки B и K), приходим к равенствам $\angle PBK = \angle PAK = 60^\circ$.

Итак, в треугольнике BCK имеют место равенства $\angle BCK = \angle CBK = 60^\circ$. Следовательно, $\angle BKC = 60^\circ$, и $\triangle BKC$ равносторонний.

Аналогично доказывается, что $\triangle CMD$ равносторонний.

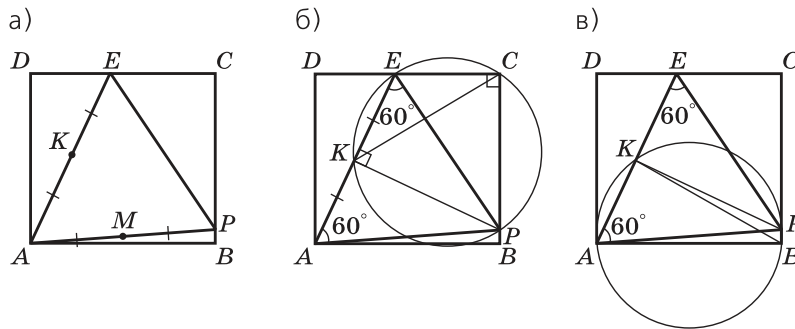


Рис. 89

186.

Дано: две пересекающиеся прямые и окружность (рис. 90, а).

Построить: точку, лежащую на окружности и равноудалённую от данных прямых.

Вопрос: сколько решений может иметь задача?

Решение. Построим две прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых (прямые a и b на рисунках 90, б, в, г). Они представляют собой множество всех точек, равноудалённых от данных прямых (задача 80, точку пересечения прямых мы также относим к этому множеству). Поэтому любая общая точка данной окружности и какой-то из прямых a и b является искомой точкой.

Выясним теперь, сколько решений может иметь наша задача. Возможны 5 случаев.

1) Окружность пересекается с каждой из прямых a и b в двух точках, и все эти точки различны (окружность 1 на рисунке 90, б); в этом случае задача имеет четыре решения.

2) Окружность пересекается с одной из прямых a или b в двух точках и касается второй прямой в третьей точке (окружность 2 на рисунке 90, б), либо окружность проходит через точку пересечения прямых a и b и пересекается с ними ещё в двух точках (окружность 3 на рисунке 90, в); в этих случаях задача имеет три решения.

3) Окружность пересекается с одной из прямых a или b в двух точках и не имеет общих точек с другой прямой (окружность 4 на рисунке 90, в), либо окружность пересекается с одной из прямых в двух точках и при этом касается второй прямой в точке пересечения прямых a и b (окружность 5 на рисунке 90, г), либо окружность касается обеих прямых a и b (окружность 6 на рисунке 90, г); во всех этих случаях задача имеет два решения.

4) Окружность касается одной из прямых a или b и не имеет общих точек с другой прямой (окружность 7 на рисунке 90, г); в этом случае задача имеет одно решение.

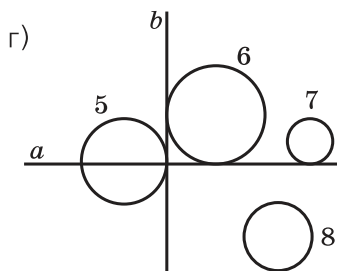
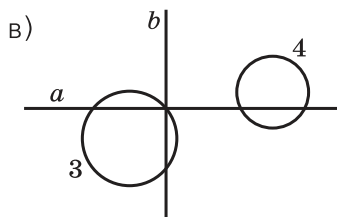
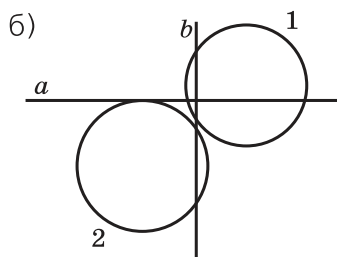
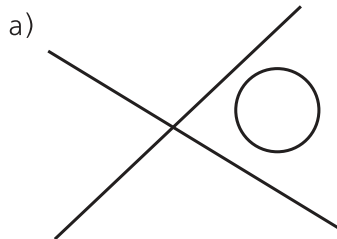


Рис. 90

5) Окружность не имеет общих точек ни с одной из прямых a и b (окружность 8 на рисунке 90, z); в этом случае задача не имеет решений.

Ответ: четыре, три (это возможно в двух случаях), два (это возможно в трёх случаях), одно или ни одного решения.

189.

Дано: окружность с центром O и точка A вне её (рис. 91, a).

Построить: прямую, проходящую через точку A и пересекающую окружность в точках B и C так, что $AB = BC$ (рис. 91, b).

Вопрос: при каком соотношении между отрезком OA и радиусом R окружности задача имеет решение?

Решение. Допустим, что задача решена. Продолжим радиус OB на отрезок BD , равный R (рис. 91, $в$). Тогда $\triangle ABD = \triangle CBO$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $AD = CO = R$.

Мы видим, что $AD = R$ и $OD = 2R$. Отсюда следует, что построение искомой прямой можно выполнить так. Сначала построим треугольник OAD по трём сторонам: одной из сторон является отрезок OA , соединяющий данные точки O и A , а две другие стороны выражаются равенствами $AD = R$ и $OD = 2R$. Точку пересечения окружности со стороной OD обозначим буквой B . Прямая AB — искомая (рис. 91, $г$). В самом деле, в равнобедренных треугольниках ADB и COB боковые стороны равны ($DA = DB = OB = OC = R$) и равны углы при основании ($\angle 1 = \angle 2$, так как углы 1 и 2 вертикальные), поэтому $\triangle ADB = \triangle COB$, откуда следует, что $AB = BC$, т. е. прямая AB удовлетворяет условию задачи.

Треугольник OAD можно построить, если $OA < OD + AD = 3R$. Если же $OA = 3R$, то искомая прямая проходит через точку O , при этом $AB = BC = 2R$ (рис. 91, $д$). Таким образом, задача имеет решение, если $OA \leq 3R$.

Ответ: $OA \leq 3R$.

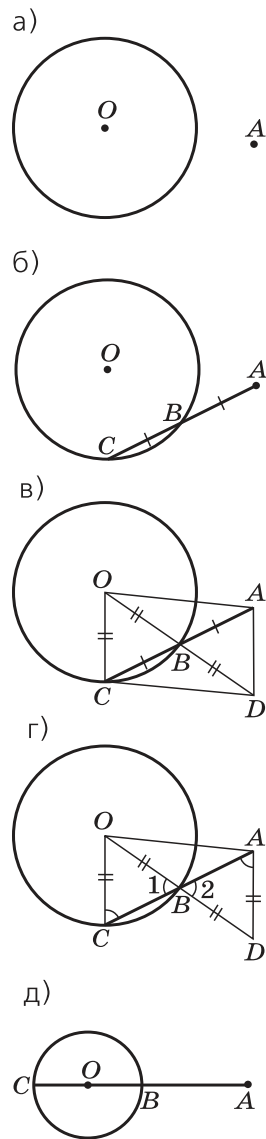


Рис. 91

190.

Построить: треугольник по периметру и двум углам.

Решение. Задачу нужно понимать так: даны отрезок PQ и углы 1 и 2 (рис. 92, а). Требуется построить треугольник ABC , в котором $AB + BC + CA = PQ$, $\angle A = \angle 1$, $\angle B = \angle 2$.

Допустим, что задача решена и искомым треугольником ABC построен (рис. 92, б). Продолжим сторону AB за точку A на отрезок AA_1 , равный AC , и за точку B на отрезок BB_1 , равный BC (рис. 92, в). Тогда $A_1B_1 = AC + AB + BC = PQ$, угол 1 — внешний угол равнобедренного треугольника A_1AC , поэтому $\angle 1 = 2\angle 3$, откуда $\angle 3 = \frac{1}{2}\angle 1$.

Аналогично $\angle 4 = \frac{1}{2}\angle 2$. Мы видим, что в треугольнике A_1B_1C сторона A_1B_1 равна данному отрезку PQ , а прилежащие к ней углы равны половинам данных углов 1 и 2.

Отсюда следует, что искомым треугольником ABC можно построить следующим образом. Строим биссектрисы данных углов 1 и 2, а затем треугольник A_1B_1C по стороне ($A_1B_1 = PQ$) и прилежащим к ней углам $\left(\angle A = \frac{1}{2}\angle 1, \angle B_1 = \frac{1}{2}\angle 2\right)$.

Для построения точек A и B заметим, что точка A является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку A_1C и прямой A_1B_1 , а точка B — точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку B_1C и прямой A_1B_1 (рис. 92, г). Построив эти серединные перпендикуляры, получим точки A и B .

Треугольник ABC искомым. В самом деле, в этом треугольнике $AC + AB + BC = A_1A + AB + BB_1 = A_1B_1 = PQ$, $\angle A = 2\angle 3 = \angle 1$, $\angle B = 2\angle 4 = \angle 2$, т. е. все условия задачи выполнены.

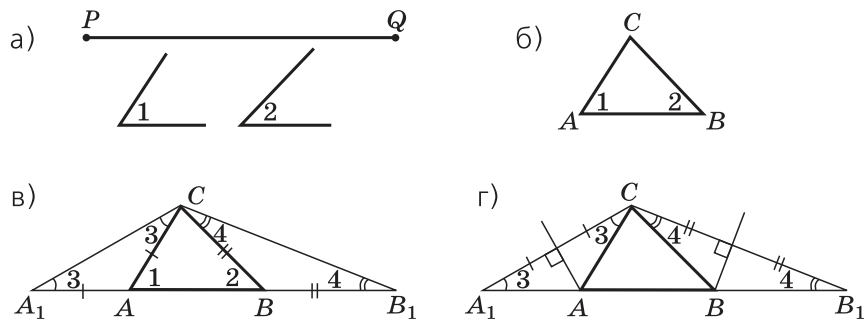


Рис. 92

192.

Дано: отрезок AB и прямая a , пересекающая этот отрезок (рис. 93, а).

Построить: на прямой a точку C так, чтобы прямая a содержала биссектрису треугольника ABC .

Вопрос: всегда ли задача имеет решение?

Решение. Допустим, что задача решена (рис. 93, б). Проведём через точку B прямую, перпендикулярную к прямой a , и обозначим буквами O и D точки пересечения проведённой прямой с прямыми a и AC (рис. 93, в). В треугольнике CBD биссектриса CO является высотой, поэтому этот треугольник равнобедренный (задача 37 б)) и $BO = OD$.

Отсюда следует, что искомую точку C можно построить следующим образом. Через данную точку B проведём прямую, перпендикулярную к прямой a , и отметим на ней точку D так, чтобы прямая a была серединным перпендикуляром к отрезку BD . Затем проведём прямую AD . Если она пересекается с прямой a в некоторой точке C , то точка C искомая (это следует из того, что в треугольнике BCD отрезок CO является медианой и высотой, а следовательно, и биссектрисой треугольника). Если же прямые AD и a не пересекутся, то задача не имеет решения.

Ответ: не всегда.

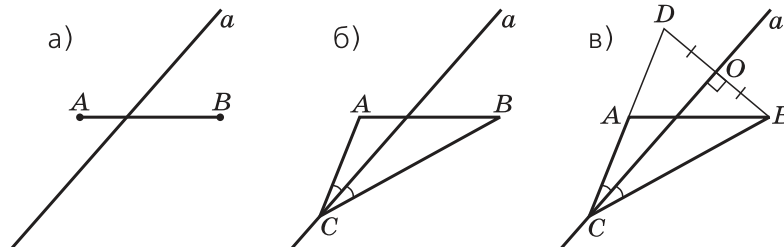


Рис. 93



Содержание

Предисловие	3
Урок 1. Точка, прямая, отрезок	6
Урок 2. Луч и полуплоскость. Угол	7
Уроки 3, 4. Равенство геометрических фигур. Сравнение отрезков и углов	8
Урок 5. Измерение отрезков	10
Урок 6. Измерение углов	—
Урок 7. Измерение отрезков и углов	11
Урок 8. Смежные и вертикальные углы	—
Урок 9. Перпендикулярные прямые. Перпендикуляр к прямой	12
Урок 10. Перпендикулярные прямые. Перпендикуляр к прямой	13
Урок 11. Решение задач	14
Урок 12. Контрольная работа № 1	—
Урок 13. Треугольник. Теорема об углах равнобедренного треугольника	—
Урок 14. Признак равнобедренного треугольника	16
Уроки 15, 16. Теорема о высоте равнобедренного треугольника	17
Урок 17. Равные треугольники. Первый признак равенства треугольников	18
Урок 18. Первый признак равенства треугольников	19
Урок 19. Второй признак равенства треугольников	20
Урок 20. Третий признак равенства треугольников	—
Уроки 21, 22. Решение задач, связанных с признаками равенства треугольников	22
Уроки 23, 24. Прямоугольник	—
Урок 25. Виды треугольников	24
Уроки 26, 27. Прямоугольный треугольник с углом в 30°	26
Урок 28. Признаки равенства прямоугольных треугольников	27
Уроки 29, 30. Серединный перпендикуляр к отрезку	28
Урок 31. Свойство биссектрисы угла	30

Урок 32. Прямоугольные треугольники	31
Урок 33. Проекция отрезка	—
Урок 34. Неравенство треугольника	33
Уроки 35, 36. Теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника	—
Уроки 37, 38. Сумма углов треугольника	34
Уроки 39, 40. Решение задач по теме «Треугольники»	35
Урок 41. Контрольная работа № 2	36
Урок 42. Определение окружности	37
Уроки 43, 44. Взаимное расположение прямой и окружности	38
Уроки 45, 46. Касательная	39
Урок 47. Хорды и дуги	40
Урок 48. Угол между касательной и хордой	41
Уроки 49, 50. Вписанный угол	42
Урок 51. Решение задач	43
Урок 52. Построения циркулем и линейкой. Построение треугольника по трём элементам	—
Урок 53. Построение угла, равного данному	45
Урок 54. Построение биссектрисы угла	46
Урок 55. Построение серединного перпендикуляра	47
Урок 56. Построение прямой, перпендикулярной к данной. Построение прямоугольного треугольника: по двум катетам; по катету и острому углу	48
Урок 57. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету	49
Урок 58. Построение касательной	51
Уроки 59, 60. Решение задач по теме «Окружность»	53
Урок 61. Контрольная работа № 3	—
Уроки 62—67. Повторение. Решение задач	54
Урок 68. Контрольная работа № 4	—
Почасовое тематическое планирование учебного материала	55
Решения некоторых задач	58